

平成29年度(2017年度) 学位論文(修士)

遺伝的アルゴリズムによる
音響メタマテリアルの
バンドギャップ最大化

平成30年(2018年)1月26日

首都大学東京大学院
システムデザイン研究科システムデザイン専攻
航空宇宙システム工学域 博士前期課程

16891530 鳴海 達也

指導教員 金崎 雅博

目次

1	序論	3
1.1	研究背景	3
1.2	研究目的	4
2	理論	4
2.1	運動方程式と分散曲線	4
2.2	有効質量	8
2.3	カットオフモードと準剛体モード	9
2.4	物理的解釈	14
3	数値計算法	16
3.1	多自由度の質点系	17
3.2	バネマス薄板構造	18
3.3	バネマス厚板構造	24
3.4	計算結果	28
4	構造設計法	39
4.1	設計対象	40
4.2	設計手法	41
4.2.1	分散曲線	41
4.2.2	遺伝的アルゴリズム	41
4.3	結果	42
5	結論	44
6	謝辞	44

1 序論

1.1 研究背景

一般にメタマテリアルという用語は電磁気学の分野で用いられ、自然界には存在しない性質を持つ人工材料 [1] のことを指す。対象とする電磁波の波長よりも小さい構造を持つ材料は、マクロ的には均質な材料として振る舞うため、構造を工夫することで、負の屈折率などの自然界には存在しない性質を持つ材料を創り出すことができる。そのようなメタマテリアルには、電磁バンドギャップ (Electromagnetic Band Gap : EBG) 構造が知られており電波を遮断する性質を持ち、アンテナの高利得化などに利用されている。EBG 構造をはじめとするメタマテリアルに関する研究は、電磁波の波長以下の微細な構造を製造する技術の発展により盛んとなった技術である。

新しい技術であるメタマテリアルには様々な応用が検討されている。その一つとして、電磁波ではなく音響振動に対してメタマテリアルの技術を用いようというものがあり、そのようなメタマテリアルを音響メタマテリアルと呼ぶ。音響メタマテリアルには色々なアイデアがあるが、特に研究が盛んなものとして、先ほど挙げたバンドギャップを用いた構造がある。音響メタマテリアルのバンドギャップは、構造の分散関係を図示したグラフである分散曲線から求められる。分散関係は、構造を伝播する振動の波数と周波数の関係であり、横軸を波数、縦軸を周波数として図示することで分散曲線を描くことができる。音響メタマテリアルにおけるバンドギャップは、このように図示された分散曲線において、分散関係をみたす波数が存在しない周波数域を指し、バンドギャップ内の周波数を持つ振動はその構造を伝播できないとされている。つまり、バンドギャップを用いた音響メタマテリアルは、特定の周波数域の振動伝播を抑制する構造となる。今後は、このような構造を指す狭義のものを音響メタマテリアルと呼ぶ。

音響メタマテリアルは一般に、ユニットセルと呼ばれる単位構造を周期的に並べた構造である。音響メタマテリアルのバンドギャップは、ユニットセルが無限に並んだ構造を仮定し、ユニットセルのみの評価から求められる。このように求められたバンドギャップ内の周波数を持つ振動が、音響メタマテリアル内を伝播していく過程で減衰することは、実験的にも確かめられている。しかし、ほとんどの研究では、ユニットセルの分散曲線からバンドギャップの存在を確認し、その後全体構造に対する周波数応答解析によってバンドギャップ内の周波数を持つ振動が減衰することを確認するのみで、その関係性を詳しく説明したものは少ない。そのため、無限周期を仮定して求められたバンドギャップ内の振動が、有限の構造内でどのように減衰するか詳しく調査することが求められる。

概念の実用化も音響メタマテリアルに関するもう一つの課題である。メタマテリアルは

対象とする波動の波長よりも微細な構造である必要がある。最新の加工技術を用いなければ実現不可能な電磁波に対するメタマテリアルに比べれば、音響メタマテリアルの製造は容易であると言えるが、それでも複雑なユニットセル形状ものでは製造に工夫が必要となる。

1.2 研究目的

本研究では、動吸振器を周期的に配置した音響メタマテリアル構造を対象とし、バネで繋がれた質点を用いて音響メタマテリアルをモデル化、運動方程式を立てることで、本研究で対象とする構造がバンドギャップを持つことを確認する。それと同時に、バンドギャップ内の周波数を持つ振動が、構造内でどのように減衰するのかを理論的に考察し、その物理的な解釈について検討する。

次のステップとして、バネマス系が周期的に配置された連続体を有限要素法により定式化する。それにより、音響メタマテリアルの曲げ振動に対する応答と分散曲線の関係を調査する。最後に、音響メタマテリアルの実用に向けて、優れた振動特性を持つ音響メタマテリアルの形状を遺伝的アルゴリズムにより探索する。

2 理論

2.1 運動方程式と分散曲線

本研究で対象とする動吸振器を周期的に配置した音響メタマテリアル構造 [4] に、バンドギャップが存在するかどうかを確認するため、対象の構造を単純化した図 2.1 に示されるようなバネで繋がれた質点系を考える。これは質量 m_2 、ばね定数 k_2 のバネマス系が接続された質量 m_1 の質点が、ばね定数 k_1 のバネで繋がれ、無限に連なった系である。音響メタマテリアルでは図 2.1 のオレンジの枠で囲まれた部分をユニットセルと呼び、音響メタマテリアルは一般的にユニットセルが連なった周期構造である。ここで、任意の位置にある質量 m_1 の質点を j 番目としたとき、その x 方向変位を u_1^j 、質量 m_2 の質点の x 方向変位を u_2^j とすると、系の運動方程式は式 (2.1), (2.2) となる。

$$m_1 \frac{d^2 u_1^j}{dt^2} + k_1 (2u_1^j - u_1^{j-1} - u_1^{j+1}) + k_2 (u_1^j - u_2^j) = 0 \quad (2.1)$$

$$m_2 \frac{d^2 u_2^j}{dt^2} + k_2 (u_2^j - u_1^j) = 0 \quad (2.2)$$

この系を進行波が伝播する場合を考えたとき、式 (2.1), (2.2) を満たす進行波の変位は式 (2.3), (2.4) で表せる。

$$u_1^{j+n} = B_1 e^{i(nqL - \omega t)} \quad (2.3)$$

$$u_2^{j+n} = B_2 e^{i(nqL - \omega t)} \quad (2.4)$$

ここで、変数 n は j 番目の質点からいくつ離れた質点であるかを表し、 j 番目の右隣にある $j+1$ 番目の質点では $n=1$ となり、左隣にある $j-1$ 番目の質点では $n=-1$ となる。 B_1, B_2 は進行波の振幅を表し、 ω は進行波の角周波数を表す。 q は波数と呼ばれ、単位長さ当たりの波の個数に 2π を掛けた値を意味し、波長 λ を用いて $q = \frac{2\pi}{\lambda}$ となる。 L は隣り合ったユニットセル間の距離であり、 qL はユニットセル間の波の個数に 2π を掛けた値になる。これはユニットセル間の位相のずれを意味する。例えば $qL = \pi$ のとき、ユニットセル間では波の位相が半周期ずれることになる。

式 (2.1), (2.2) に式 (2.3), (2.4) を代入すると、式 (2.5), (2.6) が得られる。

$$-m_1 \omega^2 B_1 + k_1(2B_1 - B_1 e^{-iqL} - B_1 e^{iqL}) + k_2(B_1 - B_2) = 0 \quad (2.5)$$

$$-m_2 \omega^2 B_2 + k_2(B_2 - B_1) = 0 \quad (2.6)$$

式 (2.5), (2.6) から B_1, B_2 を消去すると式 (2.7) が得られる。

$$m_1 m_2 \omega^4 - [(m_1 + m_2)k_2 + 2m_2 k_1(1 - \cos(qL))]\omega^2 + 2k_1 k_2(1 - \cos(qL)) = 0 \quad (2.7)$$

式は角周波数 ω と波数 q の関係式となっており、分散関係を表す。ここで、式 (2.8) で定義される変数を用いることで、式 (2.7) は式 (2.9) のように無次元化できる。

$$K = \frac{k_2}{k_1}, \quad M = \frac{m_2}{m_1}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (2.8)$$

$$K\Omega^4 - [(1+M)K + 2M(1 - \cos(qL))]\Omega^2 + 2M(1 - \cos(qL)) = 0 \quad (2.9)$$

無次元角周波数 Ω と波数 q の関係式である式 (2.9) からは、分散曲線を描くことができる。 $K=1, M=1$ の時の分散曲線を図 2.2 に示す。

図 2.2 には式 (2.9) を満たす解を示す。この図から、ある角周波数を持つ進行波がどのような波数を持つのか視覚的に確認できる。 $\Omega = 1.41 \sim 0.87$ に注目すると、式 (2.9) をみたす波数が存在しない。この周波数域が図 2.1 の系のバンドギャップである。

$K=1, M=1$ のときのバンドギャップは $\Omega = 1.41 \sim 0.87$ となる。このバンドギャップは

K, M の値の組み合わせに依存する。そこで、バンドギャップと K, M の関係について調査する。図 2.2 から、バンドギャップの上限では波数が $q = 2m\pi$ となることが分かる。 $q = 2m\pi$ のとき、式 (2.9) は式 (2.10) のように変形できる。

$$K\Omega^4 - (1 + M)K\Omega^2 = 0 \quad (2.10)$$

$\Omega > 0$ より式 (2.10) の解は式 (2.11) となる。

$$\Omega = \sqrt{1 + M} \quad (2.11)$$

式 (2.11) から、バンドギャップの上限は K の値に依存せず、 M の値にのみ依存し、 M を増加させることで単調に増加することが分かる。つまり、バネマス系の質量 m_2 が大きいほどバンドギャップの上限が高くなることになる。 $m_1 \gg m_2$ のとき $\Omega = \sqrt{1 + M} \approx 1$ となり、バンドギャップの上限はほとんど変化しない。次にバンドギャップの下限について考えると、図 2.2 から波数は $q = (2m + 1)\pi$ となることが分かる。 $q = (2m + 1)\pi$ のとき、式 (2.9) は式 (2.12) のように変形できる。

$$K\Omega^4 - (4M + KM + K)\Omega^2 + 4M = 0 \quad (2.12)$$

式 (2.12) の解は式 (2.13) になる。

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{2} \left(M + 1 + \frac{4M}{K} - \frac{\sqrt{K^2 M^2 + 2K^2 M + K^2 + 8KM^2 - 8KM + 16M^2}}{K} \right)} \quad (2.13)$$

式 (2.13) について、横軸を K 、縦軸を M としたコンター図を図 2.3 に示す。図 2.3 から、 K の値が大きいほどバンドギャップの下限が低くなるということが確認できる。また、 $M = 1$ を境に傾向が変化していることも分かる。 $M > 1$ の場合は、バンドギャップの下限が M の値にほとんど依存しないが、 $M < 1$ の場合は M が小さいほどバンドギャップの下限が低くなり、 $\Omega \propto \frac{K}{M}$ となることが分かる。

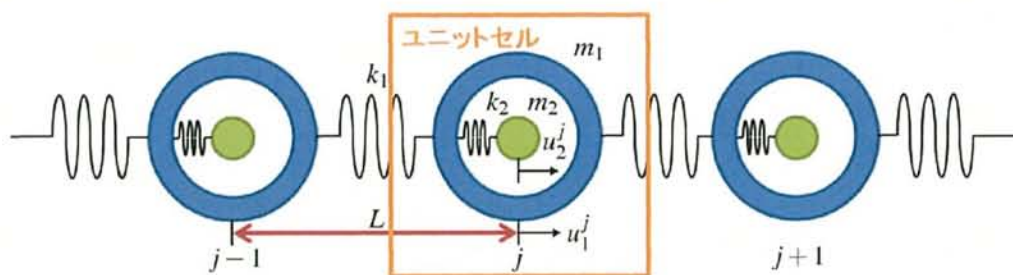


図 2.1: 音響メタマテリアル

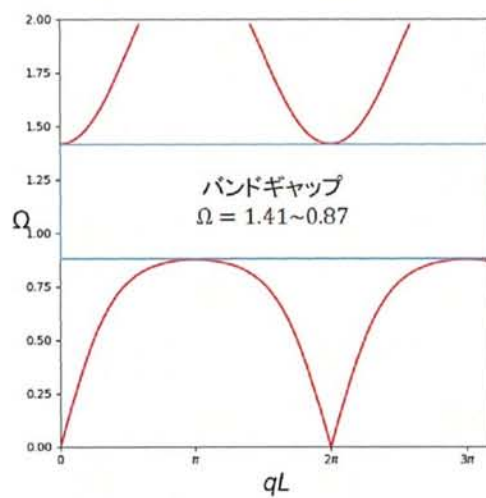


図 2.2: 分散曲線

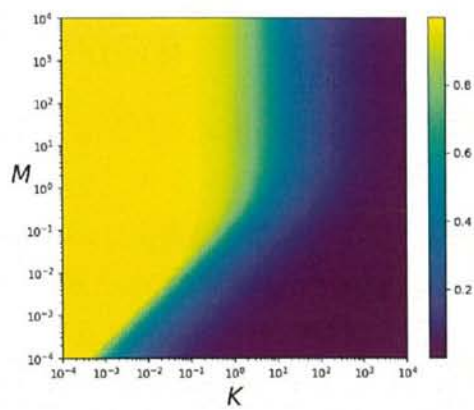


図 2.3: バンドギャップの下限值

2.2 有効質量

バンドギャップの周波数を持つ振動に対して、音響メタマテリアルは負の質量を持つ物体のように振る舞うとされる。この事実を確認するために、図 2.4 のような系を考える。この系は、図 2.1 の系におけるユニットセルを、質量 m_{eff} の質点と置き換えた系である。ここで、図 2.1 の系と図 2.4 の系が等価な系であると仮定することで、図 2.1 のユニットセルがマクロ的には質点であると仮定した場合の見掛け上の質量が求められる。図 2.4 の系に対する運動方程式は式 (2.14) となる。

$$m_{\text{eff}} \frac{d^2 u_1^j}{dt^2} + k_1 (2u_1^j - u_1^{j-1} - u_1^{j+1}) = 0 \quad (2.14)$$

m_{eff} は前述の見掛け上の質量であり、有効質量と呼ばれる。この式の解を式 (2.3) と同様な進行波であるとする、式 (2.14) は式に (2.15) 変形できる。

$$-m_{\text{eff}} \omega^2 + 2k_1 (1 - \cos(qL)) = 0 \quad (2.15)$$

式 (2.7) と式 (2.15) が同じ分散関係を持つとすることで、有効質量 m_{eff} と実際の質量 m_1, m_2 の関係式である式 (2.16) が得られる。

$$m_{\text{eff}} = m_1 - \frac{m_2 k_2}{m_2 \omega^2 - k_2} \quad (2.16)$$

式 (2.8) を用いることで、式 (2.16) は式 (2.17) に変形できる。

$$r_m = \frac{m_{\text{eff}}}{m_1 + m_2} = 1 + \frac{M}{1 + M} \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2} \quad (2.17)$$

ここで、 r_m は有効質量と実際の質量の比を意味し、式から r_m が Ω に依存することが分かる。式 (2.17) をグラフにしたものを図 2.5 に示す。

図 2.5 から、 $\Omega \ll 1$ のとき $r_m \approx 1$ となり、 Ω が大きくなるに従い $r_m \rightarrow \infty$ となることが分かる。 $\Omega = 1$ で r_m の値は発散し、その後 $r_m < 0$ となることが確認できる。また、式 (2.17) に $r_m = 0$ を代入したとき $\Omega = \sqrt{1 + M}$ となることから、 r_m は $\Omega > \sqrt{1 + M}$ で正の値となることが分かる。つまり、 r_m は $1 < \Omega < \sqrt{1 + M}$ で負の値をとる。この周波数域はバンドギャップと一致し、バンドギャップの周波数を持つ振動に対して、音響メタマテリアルが負の質量を持つ物体と等価なものとして振る舞うことが確認できる。

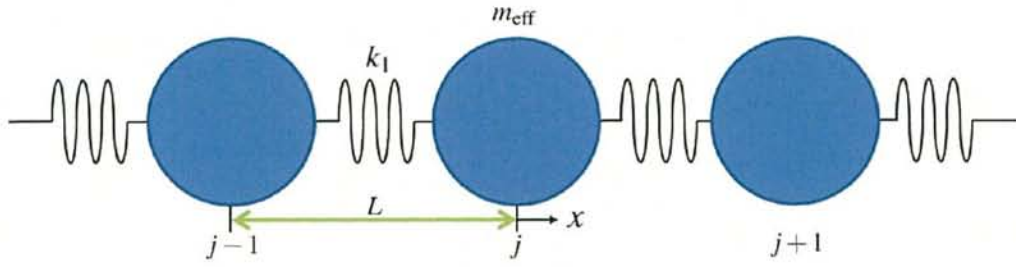


図 2.4: ユニットセルを質点と置き換えた系

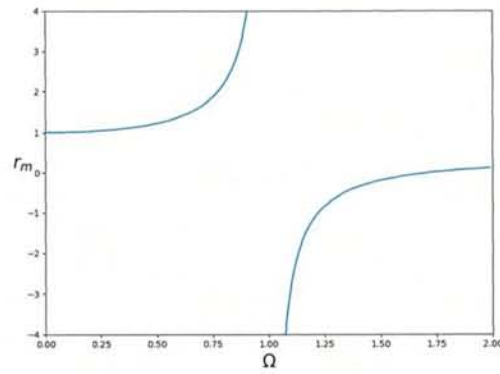


図 2.5: r_m と Ω の関係

2.3 カットオフモードと準剛体モード

音響メタマテリアルにバンドギャップの周波数を持つ正弦波外力が付加されたとき、振動は構造を伝播する過程で減衰する。そのような音響メタマテリアルの振動減衰メカニズムを理解するため、図 2.6 のような多自由度の質点系を考える。これは、質量 m_1 の質点がばね定数 k_1 のバネで繋がれ、無限に連なった系である。この系の運動方程式は式 (2.18) となる。

$$m_1 \frac{d^2 u^j}{dt^2} + k_1 (2u^j - u^{j-1} - u^{j+1}) = 0 \quad (2.18)$$

式 (2.18) の解が $u^j = A_0^j \cos \phi t$ となるとき、式 (2.18) は式 (2.19) に変形できる。

$$(-\phi^2 + 2\phi_0^2)A_0^j - \phi_0^2(A_0^{j+1} + A_0^{j-1}) = 0 \quad (2.19)$$

ここで, $\phi_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ とした. 式 (2.19) を変形することで, 隣り合う 3 点の振幅の比を表す式 (2.20) が得られる.

$$\frac{A_0^{j+1} + A_0^{j-1}}{A_0^j} = \frac{-\phi^2 + 2\phi_0^2}{\phi_0^2} \quad (2.20)$$

ϕ の値によって隣り合った質点の振幅 $A_0^{j+1}, A_0^j, A_0^{j-1}$ がどのような関係を持つか, 式 (2.20) から考える. 図 2.7 に, ϕ の変化に対する振動の概形を横方向の変位として示す.

$\phi = 0$ のとき, 次式が成り立つ.

$$A_0^j = \frac{1}{2}(A_0^{j+1} + A_0^{j-1}) \quad (2.21)$$

振幅は距離に比例して変化する. これは端の質点を静かに引っ張った状態であり, 波長は無限大となる.

$\phi \ll \phi_0$ のとき, 次式が成り立つ.

$$A_0^j > \frac{1}{2}(A_0^{j+1} + A_0^{j-1}) \quad (2.22)$$

任意の質点の振幅は, その両隣の振幅の平均値よりも大きい. これは図 2.7 のように, 外に凸な曲線として表される.

$\phi = 2\phi_0$ のとき, 次式が成り立つ.

$$A_0^j = -\frac{1}{2}(A_0^{j+1} + A_0^{j-1}) \quad (2.23)$$

変位は質点間で正負が逆になり, その大きさは距離に比例する.

$\phi > 2\phi_0$ のとき, 次式が成り立つ.

$$|A_0^j| < \frac{1}{2}|A_0^{j+1} + A_0^{j-1}| \quad (2.24)$$

変位は質点間で正負が逆になり, 任意の質点の振幅は, その両隣の振幅の平均値よりも小さくなる. これは図 2.7 において x 軸に凸な曲線として表され, $\phi \rightarrow \infty$ のとき $A_0^j \rightarrow 0$ より, x 軸に漸近していくことが分かる. つまり, 指数関数的に減衰していくことになる. これはカットオフと呼ばれる現象である. $\phi = 2\phi_0$ をカットオフ周波数と呼ぶ.

音響メタマテリアルの場合, 式 (2.20) と同様な振幅比の式がどのようなものになるか考える. 式 (2.1), (2.2) の解が $u_1^j = A_1^j \cos \omega t$, $u_2^j = A_2^j \cos \omega t$ となるとき, 式 (2.8) を用いること

で式 (2.25) が得られる.

$$\frac{A_1^{j+1} + A_1^{j-1}}{A_1^j} = \frac{K}{M} \left(\frac{M}{\Omega^2 - 1} - 1 \right) \Omega^2 + 2 \quad (2.25)$$

ここで, 式 (2.25) と変数を合わせるように式 (2.20) を変形すると式 (2.26) を得られる.

$$\frac{A_0^{j+1} + A_0^{j-1}}{A_0^j} = \frac{K}{M} \Omega^2 + 2 \quad (2.26)$$

$K = 1, M = 1$ のときの式 (2.25), (2.26) のグラフを図 2.8 に示す. 図 2.8 より音響メタマテリアルは,

$\Omega < 1$ のとき $\Omega = 1$ 近傍で次式が成り立つ.

$$\frac{A_1^{j+1} + A_1^{j-1}}{A_1^j} < -2.0 \quad (2.27)$$

これは式 (2.24) と同じカットオフが発生する関係式であり, $\Omega < 1$ のバンドギャップではユニットセル間で位相が半周期ずれ, 振幅が指数関数的に減衰するモードとなることが分かる. 本研究ではこのモードをカットオフモードと呼ぶ.

$\Omega > 1$ のとき $\Omega = 1$ 近傍で次式が成り立つ.

$$\frac{A_1^{j+1} + A_1^{j-1}}{A_1^j} > 2.0 \quad (2.28)$$

これは図 2.6 の系には存在しないモードであるが, カットオフモードと同様に, 任意の質点の振幅がその両隣の振幅の平均値よりも小さくなり, 軸に凸な曲線となる. また, $\Omega \rightarrow 1 + 0$ のとき $A_1^j \rightarrow 0$ より, x 軸に漸近していくことが分かる. そして, カットオフモードとは違い変位の正負が等しくなる. よって, $\Omega > 1$ のバンドギャップではユニットセル間の位相が等しく, 振幅が指数関数的に減衰するモードとなることが分かる. 本研究ではこのモードを準剛体モードと呼ぶ.

準剛体モードとカットオフモードに切り替わる振幅の比の条件式を以下に示す.

$$\frac{K}{M} \left(\frac{M}{\Omega^2 - 1} - 1 \right) \Omega^2 + 2 = 2.0 \quad (2.29)$$

$$\frac{K}{M} \left(\frac{M}{\Omega^2 - 1} - 1 \right) \Omega^2 + 2 = -2.0 \quad (2.30)$$

式 (2.29), (2.30) は, それぞれバンドギャップの上限・下限における条件式 (2.10), (2.12) と同

じ式であり、振幅比の式と分散曲線は同様の結果を示す理論であると言える。二つの結果を比較することで音響メタマテリアルは、分散曲線上で $q = 2m\pi$ となるモードと接したバンドギャップでは準剛体モードとなり、 $q = (2m + 1)\pi$ となるモードと接したバンドギャップではカットオフモードとなることが分かる。また、準剛体モードは分散曲線上に図示することができる。図 2.1 の分散関係である式 (2.9) は、 $\Omega = 1.41 \sim 0.87$ における解が存在しないといふが、実数解が存在しないだけで虚数解は存在する周波数域がある。図 2.2 に式 (2.9) の虚数解を青線で加えた分散曲線を図 2.9 に示す。

図 2.9 から、 $\Omega = 1.41 \sim 1.00$ の周波数域に虚数解が存在することを確認できる。式 (2.9) が虚数解を持つということは、波数が虚数となることを意味し、波数 $q = iq'$ ($q' = \text{実数}$) と表せる。ここで、進行波を意味する解である式 (2.3) に $q = iq'$ の関係を用いると、式 (2.31) を得ることができる。

$$u^{j+n} = Be^{i(nqL - \omega t)} = Be^{-nq'L}e^{i\omega t} \quad (2.31)$$

式 (2.31) は元の式である式 (2.3) に比べ、空間方向の振動成分である e^{inqL} の項が消え、振幅成分が B から $Be^{-nq'L}$ に変化している。これは、振動の位相が空間方向に依存しない。つまり、ユニットセル間で位相が等しくなることを意味する。また、ユニットセル間で振幅が $e^{-q'L}$ 倍される。振幅が指数関数的に減衰することを意味する。これは準剛体モードであり、準剛体モードは分散曲線上で虚数解として示されることが分かる。

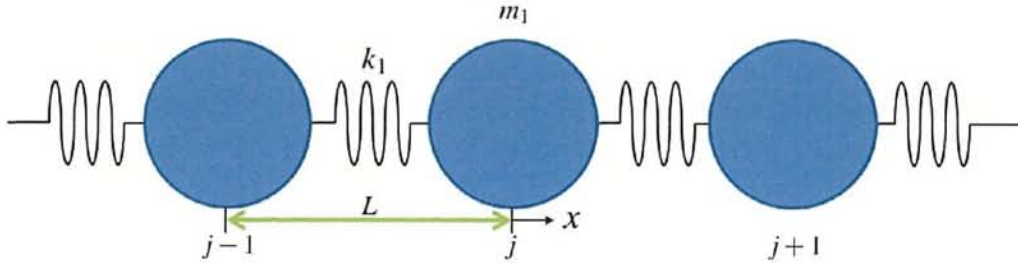


図 2.6: 多自由度の質点系

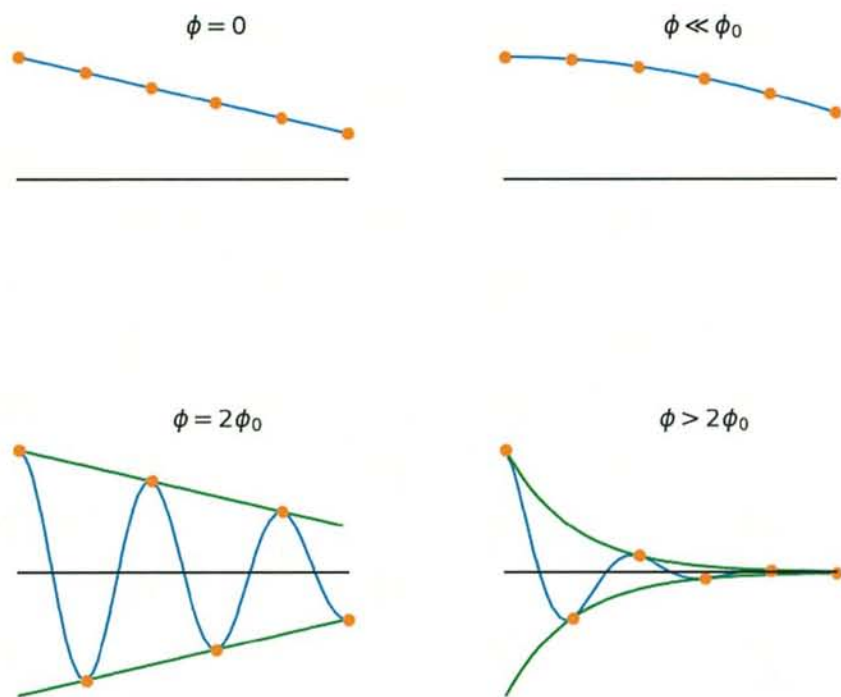


図 2.7: それぞれの ϕ における振動の概形

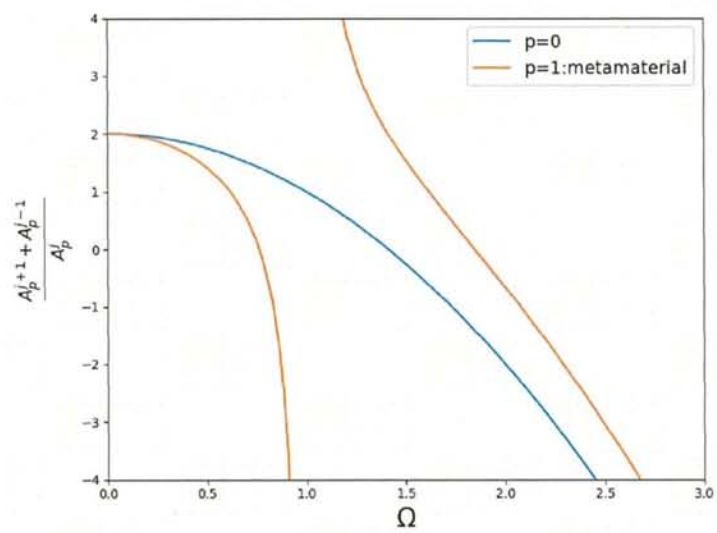


図 2.8: 振幅比の式と Ω の関係

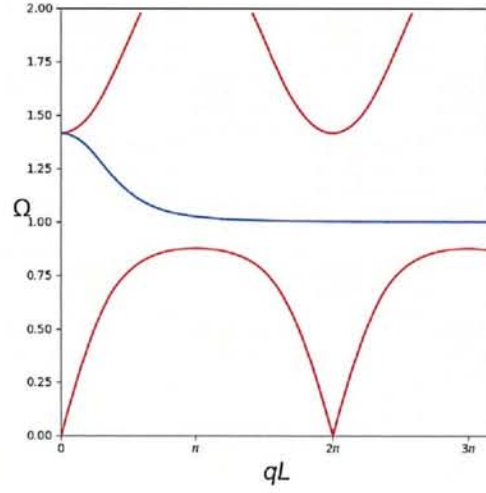


図 2.9: 分散曲線の虚数解

2.4 物理的解釈

本研究で対象とするバネマス系を周期的に配置した図 2.1 のような構造では, $\Omega < 1$ のバンドギャップではカットオフモード, $\Omega > 1$ のバンドギャップでは準剛体モードとなることが確認できた. この現象の物理的な意味を考察するため, 音響メタマテリアルの運動方程式である式 (2.1), (2.2) から得られる式 (2.32) について考える.

$$(-\phi^2 + 2\phi_0^2)A_1^j - \phi_0^2(A_1^{j+1} + A_1^{j-1}) + K\phi_0^2\left(1 - \frac{1}{1-\Omega^2}\right)A_1^j = 0 \quad (2.32)$$

ここで,

$$K = \frac{k_2}{k_1}, \quad M = \frac{m_2}{m_1}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (2.33)$$

$$u_1^j = A_1^j \cos \omega t, \quad u_2^j = A_2^j \cos \omega t, \quad \phi_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (2.34)$$

である. 式 (2.35) に示す r_ϕ を定義する.

$$r_{\phi_0} = \frac{2 + K\left(1 - \frac{1}{1-\Omega^2}\right)}{2} \quad (2.35)$$

図 2.6 の運動方程式である式 (2.19) を、改めて式 (2.36) に示す。また、式 (2.32) に式 (2.35) を用いて変形したものを式 (2.37) に示す。

$$(-\phi^2 + 2\phi_0^2)A_0^j - \phi_0^2(A_0^{j+1} + A_0^{j-1}) = 0 \quad (2.36)$$

$$(-\phi^2 + 2\phi_0^2 r_{\phi_0})A_1^j - \phi_0^2(A_1^{j+1} + A_1^{j-1}) = 0 \quad (2.37)$$

式 (2.36), (2.37) を比較すると、 j 番目の質点変位に対するばねの力を表す第 2 項のみが違い、他の項は同様な式であることが分かる。これは、図 2.6 の系にバネマス系を加えた場合の変化が、第 2 項の変化である r_{ϕ_0} の値によって考察できることを意味する。

式 (2.36) のカットオフ周波数は $\phi = 2\phi_0$ であり、 ϕ_0 が大きくなるほどカットオフ周波数が高くなる。よって式 (2.37) では、 r_{ϕ_0} が大きくなるほどカットオフ周波数が高くなると考えられる。式 (2.35) をグラフにしたものを図 2.10 に示す。

図 2.10 から $\Omega < 1.0$ では $r_{\phi_0} \leq 1.0$ となり、 $\Omega > 1.0$ では $r_{\phi_0} > 1.0$ となることが分かる。つまり、 $\Omega < 1$ ではカットオフ周波数が低い系として振る舞い、 $\Omega > 1.0$ ではカットオフ周波数が高い系として振る舞うことになる。これは図 2.8 の結果と一致する。 r_{ϕ_0} の値の変化は、質量 m_2 の質点と質量 m_1 の質点の変位の比である A_2^j/A_1^j について考えると理解できる。 A_2^j/A_1^j の式を以下に示し、そのグラフを図 2.11 に示す。

$$\frac{A_2^j}{A_1^j} = \frac{1}{1 - \Omega^2} \quad (2.38)$$

図 2.11 から分かるように、質量 m_1 の質点と質量 m_2 の質点は、 $\Omega < 1$ で同位相となるためばね定数 k_1 のバネとばね定数 k_2 のバネの力が打ち消しあい、 $\Omega > 1$ では逆位相となるため強め合うことで、 r_{ϕ_0} の値が変化する。特にバンドギャップ内では、 $\Omega < 1$ のときカットオフが発生するほど k_1 が小さい系として振る舞い、 $\Omega > 1$ のとき k_1 が非常に大きい系として振る舞う。 $k_1 \rightarrow \infty$ の系は剛体であることから、 k_1 が非常に大きい系は剛体に近い振る舞いをすることが予想でき、準剛体モードはそのようなモードだと考えられる。本研究で、 $\Omega > 1$ のバンドギャップのモードを準剛体モードと呼ぶ理由はこのためである。

この章での考察から、バネマス系でのバネの強さの変化により、図 2.1 のような音響メタ材料のバンドギャップが見られることを確認できた。しかし、この理論は図 2.1 のような構造のみに適用され、音響メタ材料全般の説明とはなっていない。バンドギャップ理論は図 2.1 のような離散系に対する理論であるが、音響メタ材料は本研究で対象とする構造のように、バネマス系を周期的に配置するなどの方法で構造に離散性を持たせ、ユニットセルが波長よりも小さいという仮定からユニットセル間の線形近似を行うことで、現実世

界でもバンドギャップ理論が適用可能となっている。

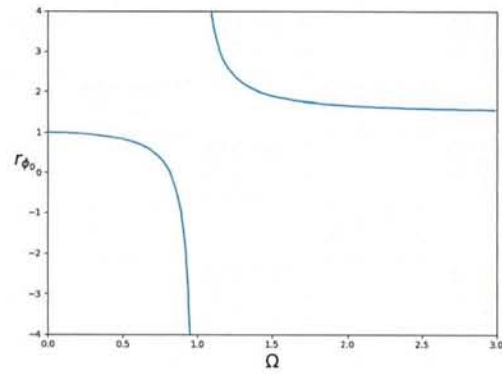


図 2.10: r_{ϕ_0} と Ω の関係

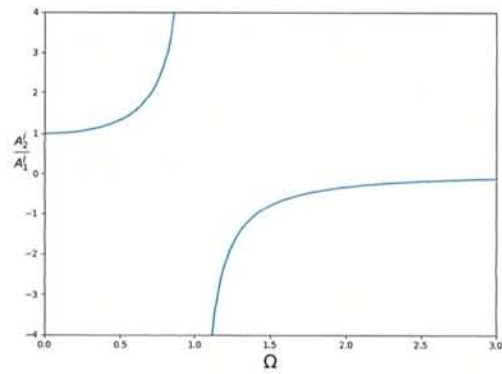


図 2.11: $\frac{A_2^j}{A_1^j}$ と Ω の関係

3 数値計算法

前章では、自由振動する音響メタマテリアルの運動方程式から得られる知見について考察した。しかし、外力が負荷された場合の挙動については理論からの定式化が難しい。そこで本研究では数値計算を用いることで、正弦波の外力に対する音響メタマテリアルの応答を調査する。音響メタマテリアルをモデル化した数値計算の対象として、3種類の構造を考える。

3.1 多自由度の質点系

前章で扱った図 2.6 のような構造を対象とする. 式 (2.1), (2.2) に外力を加えた場合, 運動方程式は式 (3.1), (3.2) となる.

$$m_1 \frac{d^2 u_1^j}{dt^2} + k_1(2u_1^j - u_1^{j-1} - u_1^{j+1}) + k_2(u_1^j - u_2^j) = f^j \quad (3.1)$$

$$m_2 \frac{d^2 u_2^j}{dt^2} + k_2(u_2^j - u_1^j) = 0 \quad (3.2)$$

ここで外力が $f^j = f_0^j e^{i\omega t}$ をみたす正弦波外力の場合, 式 (3.1), (3.2) の解は式 (3.3), (3.4) となる.

$$u_1^j = B_1^j e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

$$u_2^j = B_2^j e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

式 (3.1), (3.2) に式 (3.3), (3.4) を代入することで式 (3.5), (3.6) が得られる.

$$-m_1 \omega^2 B_1^j + k_1(2B_1^j - B_1^{j-1} - B_1^{j+1}) + k_2(B_1^j - B_2^j) = f_0^j \quad (3.5)$$

$$-m_2 \omega^2 B_2^j + k_2(B_2^j - B_1^j) = 0 \quad (3.6)$$

式 (2.8) を用いて式 (3.5), (3.6) を無次元化すると式 (3.7), (3.8) となる. ここで, $F_0^j = \frac{f_0^j}{k_1}$ である.

$$-\frac{K}{M} \Omega^2 B_1^j + (2B_1^j - B_1^{j-1} - B_1^{j+1}) + K(B_1^j - B_2^j) = F_0^j \quad (3.7)$$

$$-K \Omega^2 B_2^j + K(B_2^j - B_1^j) = 0 \quad (3.8)$$

式 (3.7), (3.8) を行列の形で表すと式 (3.9) になる.

$$(K - \Omega^2 M) B = F \quad (3.9)$$

ここで B は式 (3.10), F は式 (3.11) である.

$$B = \begin{bmatrix} B_1^1 & B_1^2 & B_1^3 & \cdots & B_2^1 & B_2^2 & B_2^3 & \cdots \end{bmatrix}^T \quad (3.10)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_0^1 & F_0^2 & F_0^3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}^T \quad (3.11)$$

また K は剛性行列, M は質量行列と呼ばれ, 式 (3.12), (3.13) で表される.

$$K = \begin{bmatrix} 2+K & -1 & 0 & \cdots & -K & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2+K & -1 & \cdots & 0 & -K & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 2+K & \cdots & 0 & 0 & -K & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -K & 0 & 0 & \cdots & K & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -K & 0 & \cdots & 0 & K & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -K & \cdots & 0 & 0 & K & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{K}{M} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{K}{M} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{K}{M} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K\Omega & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & K\Omega & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & K\Omega & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

式 (3.9) を変形すると式 (3.14) となり, 任意の F に対する B の値を求めることができる.

$$B = \left(K - \Omega^2 M \right)^{-1} F \quad (3.14)$$

式 (3.14) は縦波である疎密波の伝播を扱った式であるが, 可視化の際は横波として応答を示す.

3.2 バネマス薄板構造

式 (3.14) は離散的な系を伝播する疎密波を対象とした式である. しかし, 現実の構造は連続的である. また, 音響メタマテリアルを構造成材として用いることを目的とした場合, 疎密波ではなく曲げ波に対する応答の検討が必要となる. そこでバネマス薄板構造と呼ぶ図 3.1 のような構造を定義する. 図 3.1 は連続体である薄い板が, 奥行方向に無限の長さを持つと仮定することで, 1次元でモデル化したものを主構造と呼び, その主構造の軸に沿って周期的にバネマス系を配置した構造である. 両端は固定端を仮定し, この構造に正弦波外力が加わった

場合の応答を考える。図 3.1 の構造の数値計算には有限要素法を用いる。有限要素法とは、構造を小さな要素に分割し、要素ごとに運動方程式を解くことで、複雑な構造の数値計算を可能とする手法である。図 3.1 の構造の要素として、図 3.2 のようなバネマス薄板要素を考える。

この要素は密度 ρ 、ヤング率 E 、長さ L 、厚さ h のオイラー梁要素の両端に、質量 m_2 、ばね定数 k_2 のバネマス系が接続された要素である。オイラー梁要素は、要素の両端でそれぞれ変位 v と角変位 ϕ の自由度を持つため、自由度は 4 となる。よって要素内の任意の位置における変位 v は式 (3.15) となる。

$$v(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

また、角変位 ϕ は、変位 v の一回微分であるため式 (3.16) となる。

$$\phi(\xi) = \frac{\partial v(\xi)}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\xi & 3\xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

式 (3.15), (3.16) を用いると、両端における変位 v_1, v_2 と角変位 ϕ_1, ϕ_2 は式 (3.17) のような行列で表される。

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \phi_1 \\ \delta_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

よって、式 (3.15), (3.16) は式 (3.18), (3.19) に変形できる.

$$v(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\phi(\xi) = \frac{\partial v(\xi)}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\xi & 3\xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

式 (3.18), (3.19) を用いることで、オイラー梁要素の剛性行列 \mathbf{K}_0 と質量行列 \mathbf{M}_0 は、式 (3.20), (3.21) から計算できる.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_0 \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = EI_y \int_0^L \left[\frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial \xi^2} \right]^T \left[\frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial \xi^2} \right] d\xi \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix}^T \mathbf{M}_0 \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \rho A \int_0^L [\dot{v}(\xi)]^T [\dot{v}(\xi)] d\xi \quad (3.21)$$

ここで I_y は断面 2 次モーメントであり, A は断面積である. 奥行方向の単位幅に対しては, $I_y = \frac{h^3}{12}$, $A = h$ となる. このとき, オイラー梁要素の両端に y 方向の正弦波外力 $f_1 e^{i\omega t}$, $f_2 e^{i\omega t}$ が加わった場合の運動方程式は式 (3.22) となる.

$$(\mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_0) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (3.22)$$

式 (3.22) を要素数 n だけ重ね合わせたときの運動方程式を式 (3.23) とする.

$$\left(\left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right] \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (3.23)$$

このときバネマス薄板構造の運動方程式は, $n \times n$ の単位行列 E と零行列 0 を用いることで式 (3.24) のように表せる.

$$\left(\left[\begin{array}{c|c|c} K_{11} + k_2 E & K_{12} & -k_2 E \\ \hline K_{21} & K_{22} & 0 \\ \hline -k_2 E & 0 & k_2 E \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{c|c|c} M_{11} & M_{12} & 0 \\ \hline M_{21} & M_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & m_2 E \end{array} \right] \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \\ v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (3.24)$$

ここで $m_1 = \rho h L, k_1 = E$ として式 (2.8) を用いることで, 式 (3.24) は式 (3.25) に変形できる.

$$\left(\left[\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{E} K_{11} + K E & \frac{1}{E} K_{12} & -K E \\ \hline \frac{1}{E} K_{21} & \frac{1}{E} K_{22} & 0 \\ \hline -K E & 0 & K E \end{array} \right] - \Omega^2 \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{K}{\rho h L M} M_{11} & \frac{K}{\rho h L M} M_{12} & 0 \\ \hline \frac{K}{\rho h L M} M_{21} & \frac{K}{\rho h L M} M_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & K E \end{array} \right] \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \\ v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (3.25)$$

式 (3.25) の変数は, K, M, Ω, h, L のみとなる.

式 (3.25) の分散曲線は, 式 (3.25) から外力項を除いた運動方程式 (3.26) を用いる.

$$\left(K - \Omega^2 M\right) U = 0 \quad (3.26)$$

ここで

$$U = \left[v_1 \quad \cdots \quad v_n \quad \phi_1 \quad \cdots \quad \phi_n \quad v'_1 \quad \cdots \quad v'_n \right]^T \quad (3.27)$$

である. 式 (3.26) にユニットセル間で振幅は一定となり, 位相が qL 変化するという周期条件を用いる. これは式 (2.3) を用いることで示すことができる. 式 (2.3) の添え字を変更したものを式 (3.28) に示す.

$$u_{j+n} = B e^{i(nqL - \omega t)} \quad (3.28)$$

式 (3.28) は, $j = 1, n = 0$ のとき式 (3.29) に, $j = 1, n = (n - 1)$ のとき式 (3.30) になる.

$$u_1 = B e^{-i\omega t} \quad (3.29)$$

$$u_n = B e^{i((n-1)qL - \omega t)} \quad (3.30)$$

式 (3.29), (3.30) から式 (3.31) が得られる.

$$u_n = u_1 e^{i(n-1)qL} \quad (3.31)$$

式 (3.31) を用いることで式 (3.27) は式 (3.32) に変形できる. ここで, $\mu_x = qL$ である.

$$U = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \\ v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e^{i\mu_x} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{i(n-1)\mu_x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & e^{i\mu_x} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & e^{i(n-1)\mu_x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & e^{i\mu_x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{i(n-1)\mu_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v'_1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v'_1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

式 (3.32) に示される行列 P を用いることで, 式 (3.26) は式 (3.33) に変形できる.

$$P^* (K - \Omega^2 M) P \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v'_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.33)$$

P は μ_x を変数に持つ. $\mu_x = 0 \sim \pi$ を代入して式 (3.33) の固有値計算をすることで, μ_x に対する Ω の値が求まるため, 分散曲線を得ることができる.

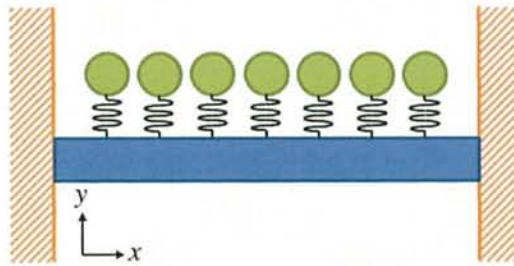


図 3.1: パネマス薄板構造

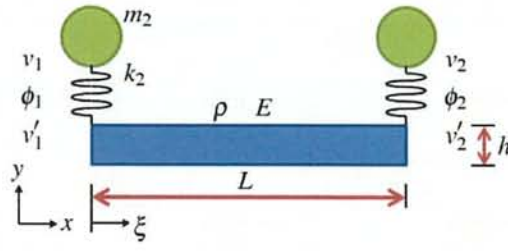


図 3.2: バネマス薄板要素

3.3 バネマス厚板構造

バネマス薄板構造は 1 次元のモデルであり, x 方向に伝播する振動を減衰することができたが, y 方向の伝播に関しては考慮できない. しかし, 板の上面に加わった振動が下面までどのように伝播するかは, 構造材の設計において重要である. そのため, 厚さ方向への振動伝播を考慮した音響メタマテリアルのモデルが必要となる. そこでバネマス厚板構造と呼ぶ図 3.3 のような構造を定義する. この構造は, バネマス薄板構造とは違い厚みを持ち, 厚さ方向にもバネマス系が並んでいる. 図 3.3 の構造の数値計算にも有限要素法を用いる. 図 3.3 の構造の要素として, 図 3.4 のようなバネマス厚板要素を考える. 図 3.4 の要素には 4 つの格子点が含まれ, 各格子点で x 方向変位 u , y 方向変位 v , バネマス系の変位 v' の 3 変数を持つ. 要素内の任意の位置の変位 v は式 (3.34) で表される.

$$v(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \xi\eta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

式 (3.34) を用いると, 各格子点における変位 v_1, v_2, v_3, v_4 は式 (3.35) のような行列で表される.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ L & 0 & 0 & 1 \\ L & h & Lh & 1 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

よって, 式 (3.34) は式 (3.36) に変形できる.

$$v(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \xi\eta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ L & 0 & 0 & 1 \\ L & h & Lh & 1 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$u(\xi, \eta)$ も同様に書ける. ここで

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \xi\eta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ L & 0 & 0 & 1 \\ L & h & Lh & 1 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.37)$$

とすると, 2次元のひずみ ϵ は式 (3.38) の通りに書ける.

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

ここで,

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

とする. 平面ひずみの場合の応力-ひずみ関係行列 D は

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

となる。また,

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

とすると, 剛性行列 K_0 と質量行列 M_0 は式 (3.42), (3.43) から計算できる.

$$K_0 = \int_0^h \int_0^L B^T D B d\xi d\eta \quad (3.42)$$

$$M_0 = \int_0^h \int_0^L N^T N d\xi d\eta \quad (3.43)$$

バネマス厚板構造の運動方程式は, 式 (3.25) と同様の手順により式 (3.44) として得られる.

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{E} K_{11} & \frac{1}{E} K_{12} & 0 \\ \frac{1}{E} K_{21} & \frac{1}{E} K_{22} + KE & -KE \\ 0 & -KE & KE \end{bmatrix} - \Omega^2 \begin{bmatrix} \frac{K}{\rho h L M} M_{11} & \frac{K}{\rho h L M} M_{12} & 0 \\ \frac{K}{\rho h L M} M_{21} & \frac{K}{\rho h L M} M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & KE \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (3.44)$$

式 (3.44) の変数は, $K, M, \Omega, R = L/h$ のみとなる.

x と y の 2 方向に薄板構造と同様な周期条件を用いることで, 図 3.3 の構造の分散曲線を求める. このとき, x 方向のユニットセル間では位相が $q_x L = \mu_x$ 変化し, y 方向のユニットセ

ル間では位相が $q_y h = \mu_y$ 変化する. 1 要素に周期条件を適用すると式 (3.45) となる.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v'_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ v'_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ v'_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ v'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{i\mu_x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\mu_x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\mu_x} \\ e^{i(\mu_x+\mu_y)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\mu_x+\mu_y)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\mu_x+\mu_y)} \\ e^{i\mu_y} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\mu_y} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\mu_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v'_1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

全要素に周期条件を用いることで, 式 (3.33) と同様の式 (3.46) を得られる.

$$P^* (K - \Omega^2 M) P \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v'_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.46)$$

P は μ_x, μ_y を変数に持つことから, $\mu_x, \mu_y = 0 \sim \pi$ を代入して式 (3.46) の固有値計算をすることで, μ_x, μ_y に対する Ω の値が求まるため, 分散曲線を得ることができる. 前章の考察より, $\mu_x, \mu_y = 0, \pi$ における Ω の値が重要であると言えるため, 本研究では μ_x, μ_y を式 (3.47) のように変化させた場合の分散曲線を求める.

$$(\mu_x, \mu_y) = (\pi, \pi) \rightarrow (\pi, 0) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (0, \pi) \rightarrow (\pi, \pi) \quad (3.47)$$

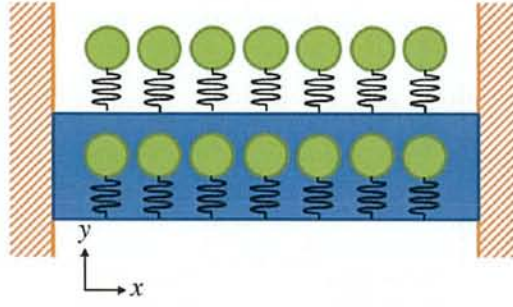


図 3.3: バネマス厚板構造

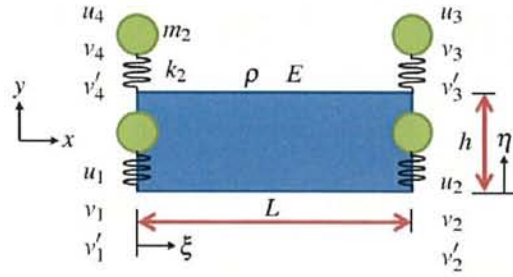


図 3.4: バネマス厚板要素

3.4 計算結果

多自由度の質点系

式 2.9 に表 3.1 の値を代入した場合の分散曲線を図 3.5a, 3.5b に示す. ここで, 表 3.1 の Ω はバンドギャップの各周波数域である. バンドギャップの下限は $M = \frac{m_2}{m_1} = 1$ を境に傾向が変化するという結果から, $M = 2$ と固定して $K = \frac{k_2}{k_1}$ の値を変化させた場合の分散曲線を図 3.5a に, $M = 0.1$ に固定して K の値を変化させた場合の分散曲線を図 3.5b に示す. 図 3.5a, 3.5b からバンドギャップの上限は K の値に依存しないことが確認できる. また, K の減少に伴いバンドギャップの下限が低下することが確認できる. 図 3.5a と図 3.5b を比較すると, 同じ K の値の場合, $M = 0.1$ の方がバンドギャップの下限が低いことが確認できる. これらの結果から, M の値が大きいとバンドギャップの上限が高くなり, M の値が小さいとバンドギャップの下限が低くなると言える. また, K の値は大きいほどバンドギャップが広くなると言える.

$j = 0, 1, \dots, 9$ のときの式 (3.1), (3.2) について, $u^{-1} = u^{10} = 0$ として式を解くことで, 正弦波外力に対する応答を求める. 図 3.6a~3.6d は, $j = 0$ の質点に正弦波外力を加えた場合の応答である. 質量 m_1 の質点を青色の点で, 質量 m_2 の質点を緑色の点で示してあり, 外力を黒色の矢印で示す. ここで, $K = 10.0, M = 2.0$ であり, この系のバンドギャップは $\Omega = 1.73 \sim 0.47$ である. バンドギャップ内の角周波数 $\Omega = 0.5, 1.7$ に対する応答を図 3.6b, 3.6c に, バンド

ギャップ外の角周波数 $\Omega = 0.4, 1.8$ に対する応答を図 3.6a, 3.6d に示す。図 3.6b, 3.6c から、バンドギャップ内では質点の振幅が指数関数的に減衰していることが確認できる。また、図 3.6b では質点間の振幅が逆位相となり、図 3.6c では同位相となっており、カットオフモードと準剛体モードの理論通りであるといえる。一方で、図 3.6b, 3.6c と角周波数が 0.1 しか変わらない図 3.6a, 3.6d の応答では振動の減衰が確認できず、バンドギャップ理論の予測が正しいと言える。

今回行った数値計算では構造における減衰は考慮していない。それにも関わらず図 3.6b, 3.6c では振動変位が減衰しており、加振点で加えられたエネルギーがどのように減衰されるのかが疑問として挙げられる。図 3.6a, 3.6d のようなバンドギャップ外の振動における応答では、固定端でエネルギーの打ち消しが起こる。しかし、バンドギャップ内の振動における応答では、加振点から離れた質点での変位は零になる。つまり、固定端でのエネルギーの打ち消しは起こらないと予想できる。考えられる他の選択肢としては、加振点で与えられたエネルギーが加振点で打ち消されるというものがある。これは振動の 1 周期の中で、外部から力を加えられているときと、逆に外部に仕事を行っているときがあり、1 周期で積分すると力の総和が零になるという仮説である。また、加振点で加えられたエネルギーが加振点に返ってくる現象については、それぞれのバネマス系で自由端反射が起こり、重ね合わせの結果伝播方向の変位は零となり、振動は加振点に反射するのだと予想できる。ただし、これらの仮説の証明には更なる検討が必要となる。

図 3.6e~3.7b は、 $j = 0, 1, \dots, 9$ の質点全てに等しく正弦波外力を加えた場合の応答であり、図 3.6a~3.6d と同じく $K = 10.0, M = 2.0$ である。バンドギャップ外の角周波数に対する応答である図 3.6e, 3.7b は、図 3.6a, 3.6d と同じような概形である。一方で、バンドギャップ内の角周波数に対する応答である図 3.6f, 3.7a は、図 3.6b, 3.6c とは違い変位がゼロとなる質点は存在しない点異なる。しかし、これは振動の減衰が起きていないということではなく、全ての質点に加振されているためである。もう一つ異なる点として、カットオフモードである図 3.6f において、各質点変位の正負が等しいことが挙げられる。ただし、これも重ね合わせによる結果である。図 3.7c は、図 3.6b と同じ K, M, Ω であり、質点の数のみ異なる。図 3.7c と図 3.6b の比較から、振動減衰の速度は、質点の数に依存しないと言える。

表 3.1: 図 3.5a, 3.5b のパラメータ

	K	M	Ω
図 3.5a	0.1	2.0	0.99 ~ 1.73
	1.0		0.88 ~ 1.73
	10.0		0.47 ~ 1.73
	100.0		0.16 ~ 1.73
図 3.5b	0.1	0.1	0.98 ~ 1.05
	1.0		0.59 ~ 1.05
	10.0		0.19 ~ 1.05
	100.0		0.06 ~ 1.05

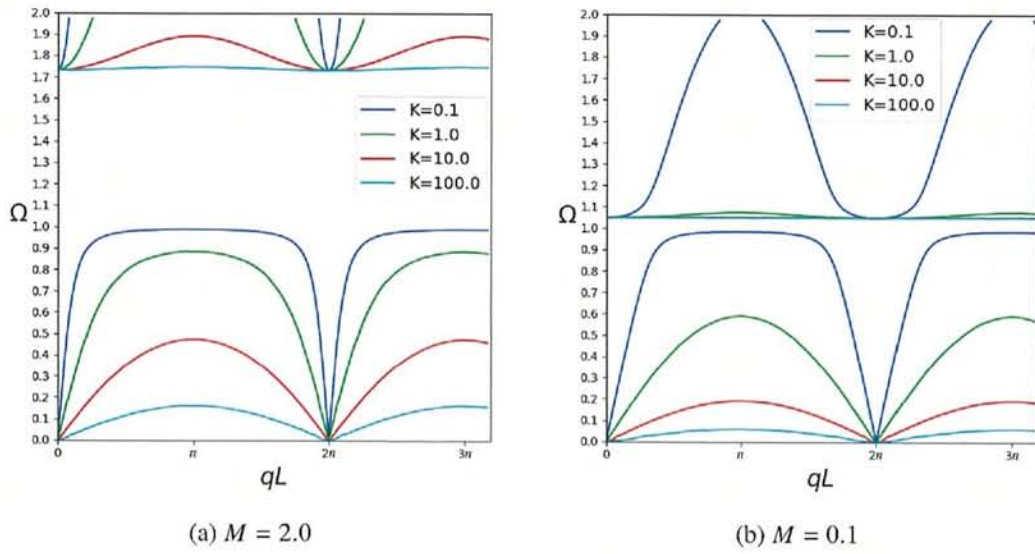
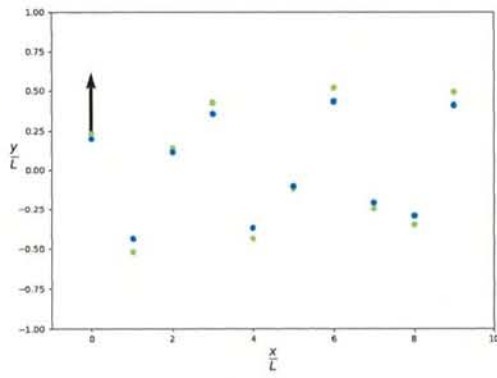
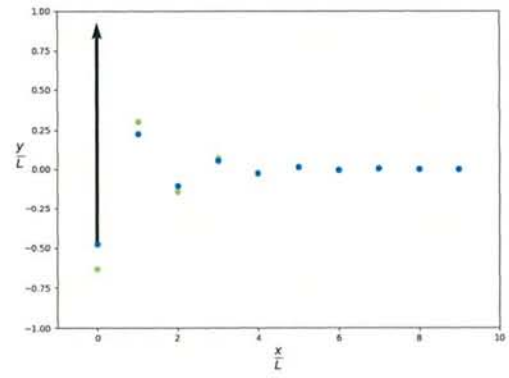


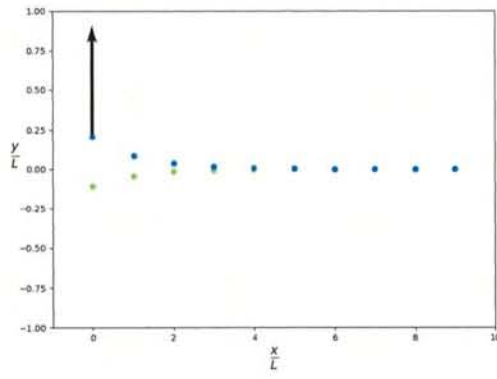
図 3.5: 多自由度の質点系の分散曲線



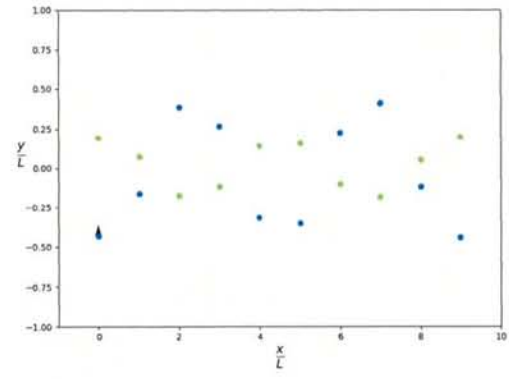
(a) $K = 10.0, M = 2.0, \Omega = 0.4$



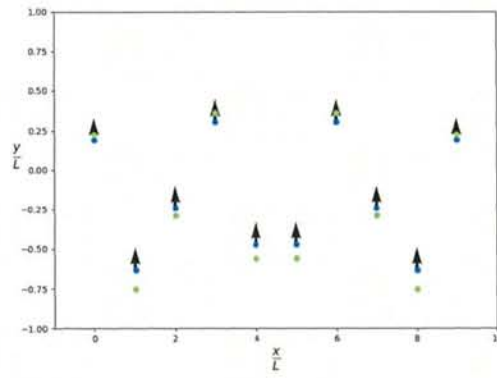
(b) $K = 10.0, M = 2.0, \Omega = 0.5$



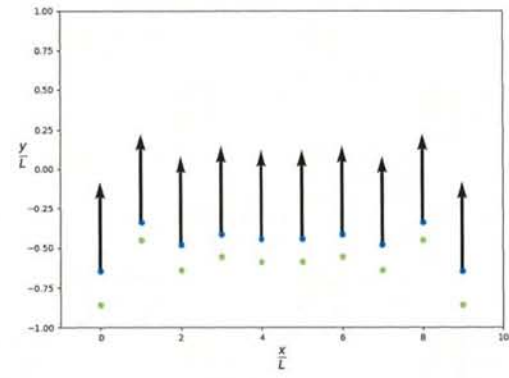
(c) $K = 10.0, M = 2.0, \Omega = 1.7$



(d) $K = 10.0, M = 2.0, \Omega = 1.8$



(e) $K = 10.0, M = 2.0, \Omega = 0.4$



(f) $K = 10.0, M = 2.0, \Omega = 0.5$

図 3.6: 多自由度の質点系の応答 1

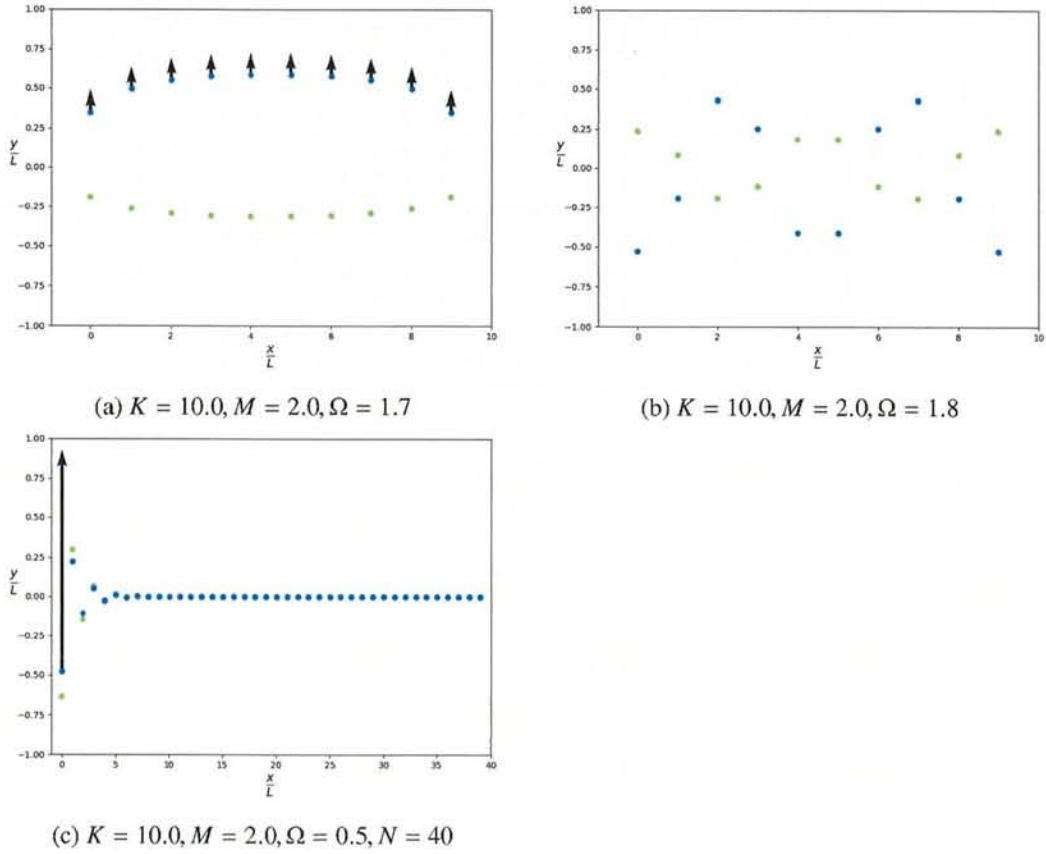


図 3.7: 多自由度の質点系の応答 2

バネマス薄板構造

バネマス薄板構造の分散曲線を求める式 (3.33) は、任意の要素数 $N = n - 1$ に対して式を立てることができる。そこで、要素数 $N = 1, 10, 100, 1000$ に対する分散曲線を図 3.8 に示す。ここで、 $K = 1.0, M = 1.0$ である。図 3.8 において $N = 100$ と $N = 1000$ の分散曲線はほぼ一致しており、要素数の増加に伴い分散曲線はある真の値に漸近することが予想できる。これは分散曲線を求めるときに用いた周期条件が、空間方向の変位の概形を正弦波と仮定する理論であり、要素数の増加に伴う自由度の増加によって、より正確に正弦波を再現するためだと考えられる。バンドギャップ上限の真の値については予想することができ、その値は $\sqrt{1+M} = \sqrt{2}$ である。これは式 (2.11) に示される値であり、図 2.6 の質点系とバネマス薄板構造のバンドギャップ上限は一致すると考えられる。図 3.8 の結果より、以降に示すバネマス薄板構造の分散曲線は要素数 $N = 100$ に対して求めた。図 3.9a～3.9f に、表 3.2 に示す値を用いて式 (3.33) から求めた分散曲線を示す。図 3.9a は、 $M = 2.0, h = 1.0, L = 1.0$ としたときの K の値による分散曲線の変化を示したものであり、 $K < 1.0$ では右上がりだった第 2 モードが、 $K = 7.0$ 付近では平行に近い曲線となり、それ以降は右下がりの曲線となることが分かる。こ

これは $\Omega > 1$ におけるバンドギャップのモードが、準剛体モードからカットオフモードに変化することを示しており、式 2.9 の結果とは異なる。図 3.9b より、 $K = 100.0 \sim 200.0$ 付近では $\Omega = 1$ の角周波数がバンドギャップに含まれていないが、これも式 2.9 の結果とは異なる。また、 $K < 100.0$ で第 2 モードの $\mu_x = 0$ における角周波数が $\sqrt{1+M}$ で一定となるが、 $K = 140.0$ 付近で $\mu_x = 0$ における第 2 モードと第 3 モードの角周波数が一致し、 $K > 200.0$ では第 2 モードの角周波数が全体的に低下していくことが分かる。その結果 K の値が大きい場合は、第 1 モードと第 2 モード間のバンドギャップよりも第 2 モードと第 3 モード間のバンドギャップの方が広くなることが分かる。またその場合、 $\Omega = 1$ 前後のモードは準剛体モードとなる。 $K = 1.0, M = 2.0, h = 1.0, L = 1.0$ の分散曲線に対して、 $h = 0.1, 10.0$ としたものを図 3.9e に、 $L = 0.1, 10.0$ としたものを図 3.9f に示す。図 3.9e と図 3.9f の分散曲線は、値がほぼ一致している。また、 $h = 0.1$ の場合と $L = 10.0$ の場合の分散曲線は、 $K = 1000.0, M = 2.0, h = 1.0, L = 1.0$ の分散曲線とほぼ一致しており、 h と L の値による変化は K の値の変化に置き換えて考えることができると言える。よって、以降は $h = 1.0, L = 1.0$ のみを考慮する。

要素数 $N = 40$ における式 (3.25) の解を図 3.10a~3.11d に示す。ここで、格子点 $n = 1$ へのみ正弦波外力が負荷されており、 $h = 1.0, L = 1.0$ とする。図 3.10a, 3.10b は、 $\Omega > 1$ のモードが準剛体モードからカットオフモードへと変化する前後のモードである。図 3.10a は格子点 $n = 8$ までは準剛体モードであると言えるが、 $n = 9$ で正負が逆になっている。また、図 3.10b は格子点 $n = 2$ 以降はカットオフモードであると言えるが、 $n = 1$ と $n = 2$ の正負が等しい。これらの結果から、準剛体モードからカットオフモードへと変化する過程のモードは、振幅は指数関数的に減衰するが、変位の正負は不規則に変化するようなモードになると言える。図 3.10c~3.10e は $K = 1.0, M = 0.1$ のモードであり、それぞれの角周波数は $\Omega = 0.76, 1.03, 1.20$ であり、 $K = 1.0, M = 0.1$ の分散曲線における第 2 モードは狭い周波数域にのみ存在しているが、その周波数では振動が減衰しないことを図 3.10d から確認できる。また、第 2 モードの上下にあるバンドギャップの周波数ではカットオフモードとなることが図 3.10c, 3.10e からわかる。図 3.10f~3.11b は $K = 20.0, M = 0.1$ のモードであり、それぞれの角周波数は $\Omega = 0.99, 1.00, 1.01$ である。 $K = 20.0, M = 0.1$ の分散曲線では $\Omega = 1$ がバンドギャップに含まれない。動吸振器の理論通り、 $\Omega = 1$ では板の振幅は 0 となることが図 3.11a から確認できるが、その上下の周波数では振動減衰が起きないことが図 3.10f, 3.11b からわかる。図 3.11c, 3.11c は $K = 100.0, M = 0.1$ のモードであり、それぞれの角周波数は $\Omega = 0.09, 0.47$ である。図 3.11c, 3.11c から、 $\Omega < 1$ の周波数域にカットオフモードと準剛体モードの両方が存在することもあると分かる。

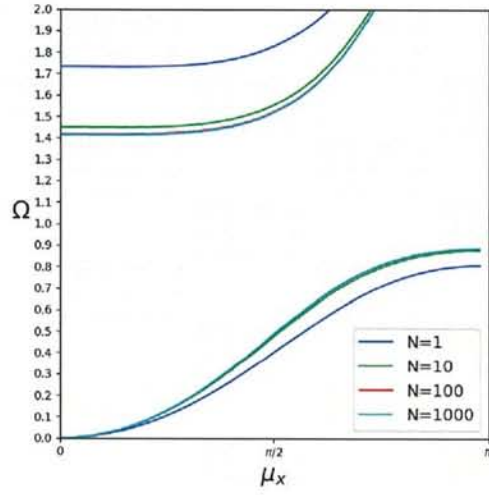
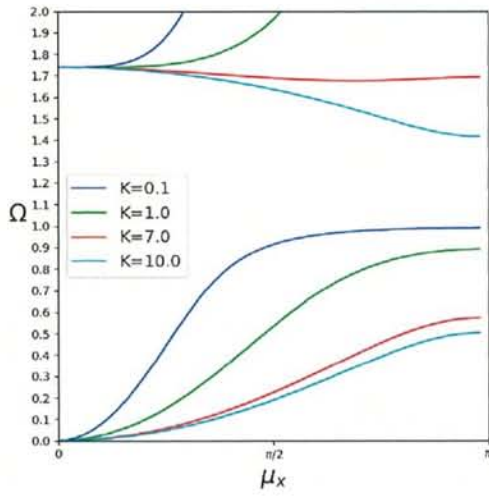


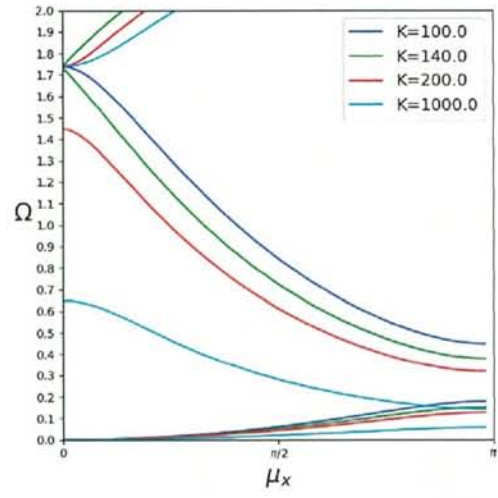
図 3.8: バネマス薄板構造の分散曲線 ($K = 1.0, M = 1.0, h = 1.0, L = 1.0$)

表 3.2: 図 3.9a～3.9f に対する計算のためのパラメータ

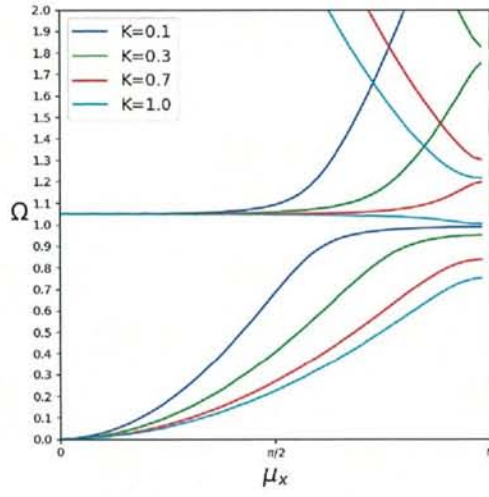
	K	M	h	L	$\Omega_{1\sim 2}$	$\Omega_{2\sim 3}$
図 3.9a	0.1	2.0	1.0	1.0	0.99 ~ 1.74	13.00 ~ 14.14
	1.0				0.89 ~ 1.74	4.47 ~ 4.56
	7.0				0.57 ~ 1.67	1.74 ~ 2.68
	10.0				0.50 ~ 1.41	1.74 ~ 2.56
図 3.9b	100.0	2.0	1.0	1.0	0.18 ~ 0.45	1.74 ~ 2.05
	140.0				0.15 ~ 0.38	1.73 ~ 1.74
	200.0				0.13 ~ 0.32	1.45 ~ 1.74
	1000.0				0.06 ~ 0.14	0.65 ~ 1.74
図 3.9c	0.1	0.1	1.0	1.0	0.99 ~ 1.05	2.91 ~ 3.16
	0.3				0.95 ~ 1.05	1.75 ~ 1.83
	0.7				0.84 ~ 1.05	1.20 ~ 1.30
	1.0				0.75 ~ 1.0	1.05 ~ 1.21
図 3.9d	5.0	0.1	1.0	1.0	0.36 ~ 0.45	1.05 ~ 1.11
	10.0				0.26 ~ 0.32	1.05 ~ 1.11
	20.0				0.18 ~ 0.22	1.02 ~ 1.05
	100.0				0.08 ~ 0.10	0.49 ~ 1.05
図 3.9e	1.0	2.0	0.1	1.0	0.06 ~ 0.14	0.65 ~ 1.74
			10.0		1.00 ~ 1.74	128.35 ~ 141.42
図 3.9f	1.0	2.0	1.0	0.1	1.00 ~ 1.74	128.35 ~ 141.42
				10.0	0.06 ~ 0.14	0.65 ~ 1.74



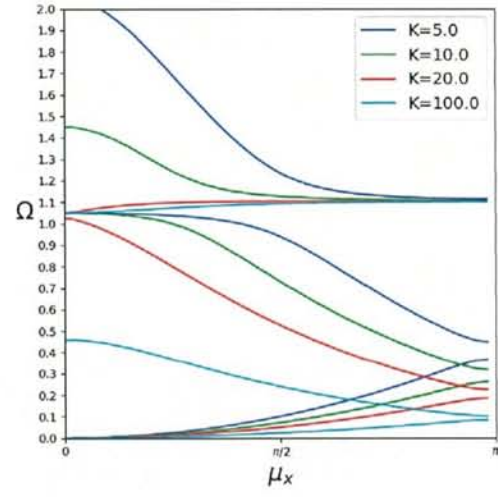
(a) $M = 2.0, h = 1.0, L = 1.0$



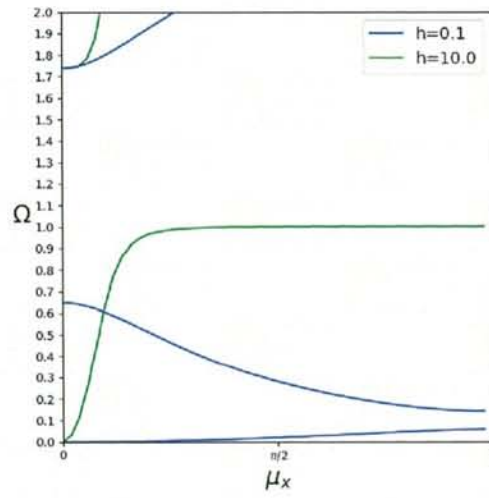
(b) $M = 2.0, h = 1.0, L = 1.0$



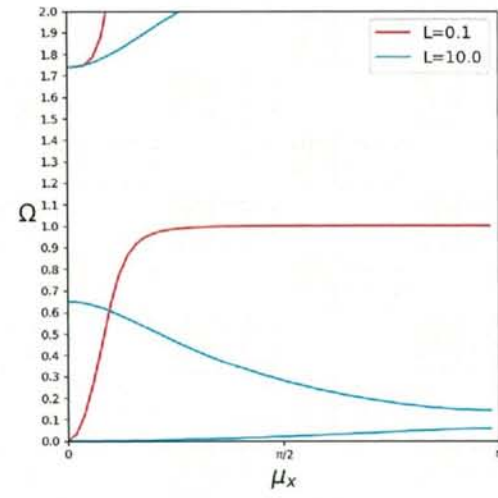
(c) $M = 0.1, h = 1.0, L = 1.0$



(d) $M = 0.1, h = 1.0, L = 1.0$

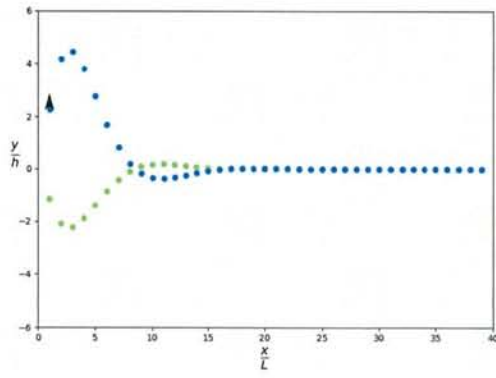


(e) $K = 1.0, M = 2.0, L = 1.0$

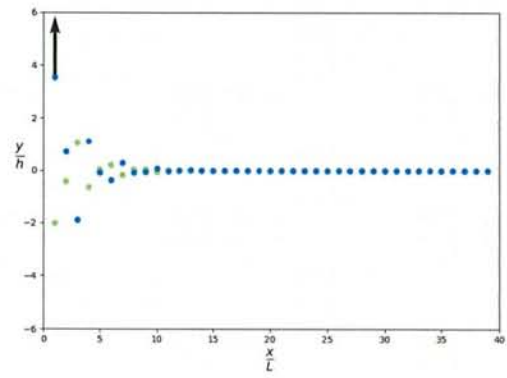


(f) $K = 1.0, M = 2.0, h = 1.0$

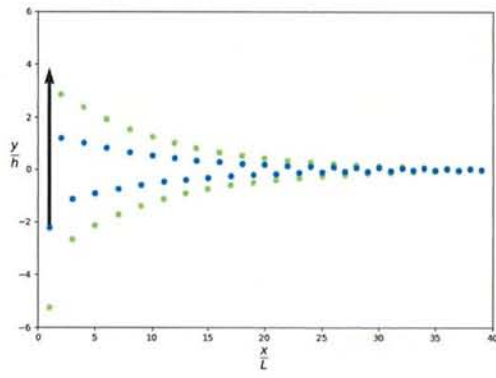
図 3.9: パネマス薄板構造の分散曲線



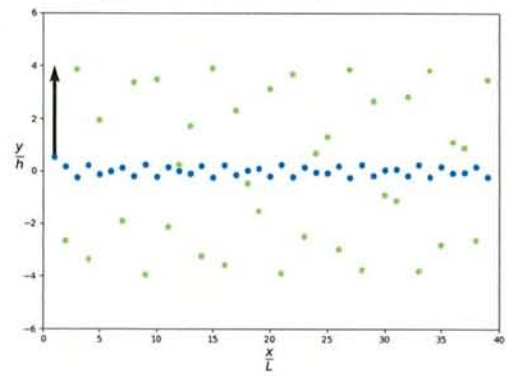
(a) $K = 1.0, M = 2.0, \Omega = 1.73$



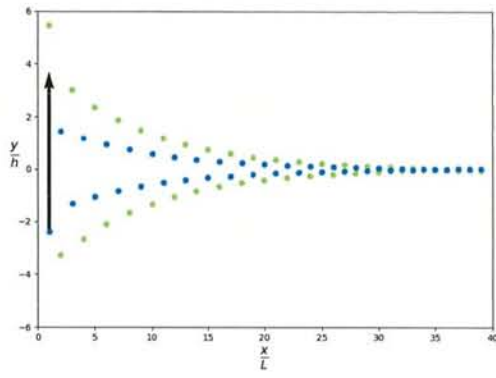
(b) $K = 7.0, M = 2.0, \Omega = 1.66$



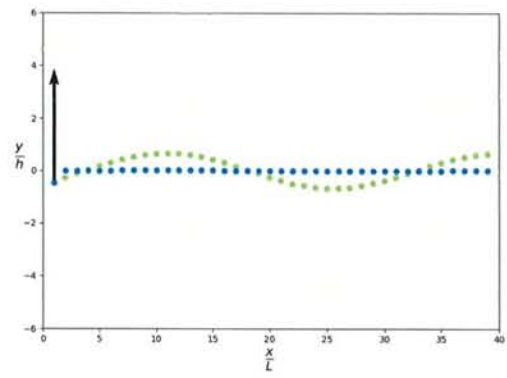
(c) $K = 1.0, M = 0.1, \Omega = 0.76$



(d) $K = 1.0, M = 0.1, \Omega = 1.03$



(e) $K = 1.0, M = 0.1, \Omega = 1.20$



(f) $K = 20.0, M = 0.1, \Omega = 0.99$

図 3.10: パネマス薄板構造の応答 1

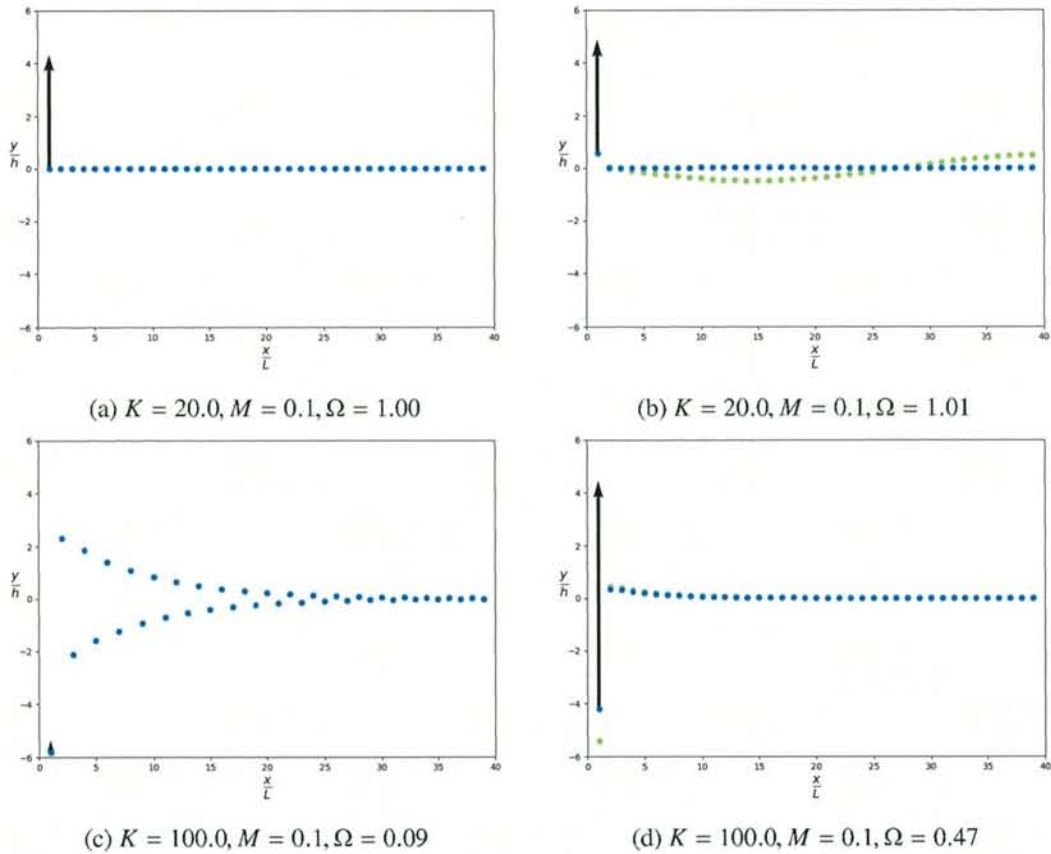


図 3.11: バネマス薄板構造の応答 2

バネマス厚板構造

バネマス厚板構造の分散曲線を求める式 (3.46) に, $K = 1.0, M = 0.1, R = 1.0$ を代入した場合の分散曲線を図 3.12a に示す. 図 3.12a からはバンドギャップの存在を確認できないが, 後に示すように第 2 モードは x 方向の変位が支配的なモードであり, y 方向の正弦波外力に対する影響は少ない. そこで, バネマス厚板構造の分散曲線は第 2 モードを無視してバンドギャップを求める. $K = 1.0, M = 0.1$ における $R = 0.1, 1.0, 10.0$ と変化させた場合の分散曲線の変化を図 3.12b に示す. 図 3.12b から, バンドギャップの上限は $(\mu_x, \mu_y) = (0, 0)$ となり, バンドギャップの下限は μ_x または μ_y が π となる波数に存在することが分かる.

図 3.13a~3.13c にバネマス厚板構造の左端に正弦波外力を加えた場合のモードを示す. 図 3.13a は, バンドギャップの角周波数である $\Omega = 0.82$ の応答である. 図 3.13a から y 方向の変位がカットオフされていることが確認できる. 図 3.13b は, 同様にバンドギャップの角周波数である $\Omega = 1.07$ の応答であるが, y 方向の変位の減衰は確認できない. より低い角周波数である $\Omega = 1.05$ の応答である図 3.13c から, 準剛体モードの振動減衰が確認できる. これは分散曲線のバンドギャップにずれが存在することを意味するが, 第 2 モードを無視したことが

原因であると考えられる。図 3.13d～3.13f にバネマス厚板構造の上面に正弦波外力を加えた場合のモードを示す。図 3.13d には図 3.13c で準剛体モードとなった $\Omega = 1.05$ に対する応答を示す。図 3.13d から、上面の変位は y 方向の伝播にともない振幅が減衰していることを確認できる。図 3.13e には図 3.13a でカットオフモードとなった $\Omega = 0.82$ に対する応答を示す。図 3.13e からは y 方向の振動減衰を確認できない。より高い角周波数である $\Omega = 0.87$ の応答を図 3.13f に示すと、 y 方向でカットオフが発生していることが確認できる。これらの結果から、バネマス厚板構造では第 2 モードを無視しないとバンドギャップを求めることができず、無視したとしてもバンドギャップにずれが生じると言える。

表 3.3: 図 3.12b の計算のためのパラメータ

	K	M	R	Ω
図 3.12b	1.0	0.1	0.1	0.95 ~ 1.07
			1.0	0.81 ~ 1.07
			10.0	0.99 ~ 1.07

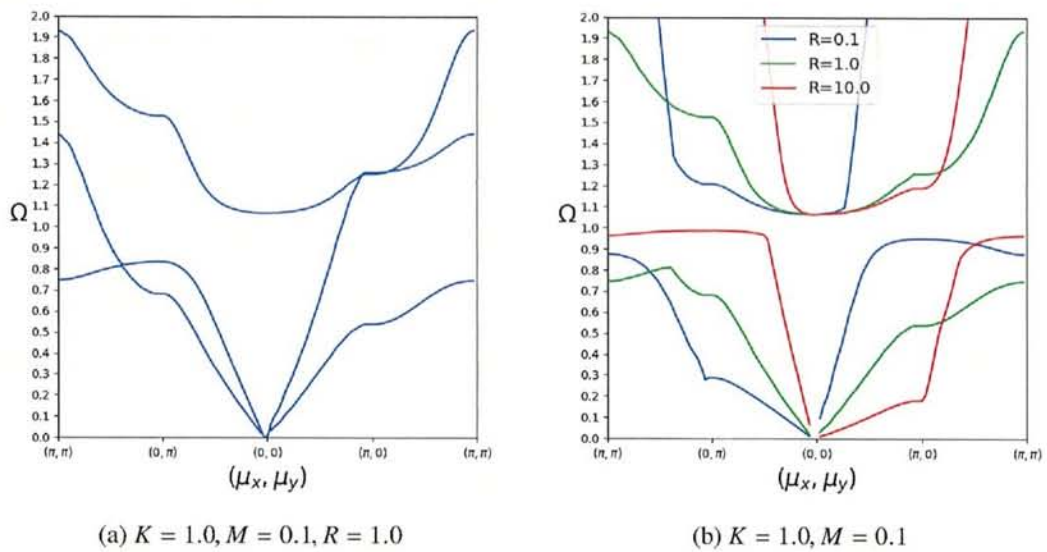


図 3.12: バネマス厚板構造の分散曲線

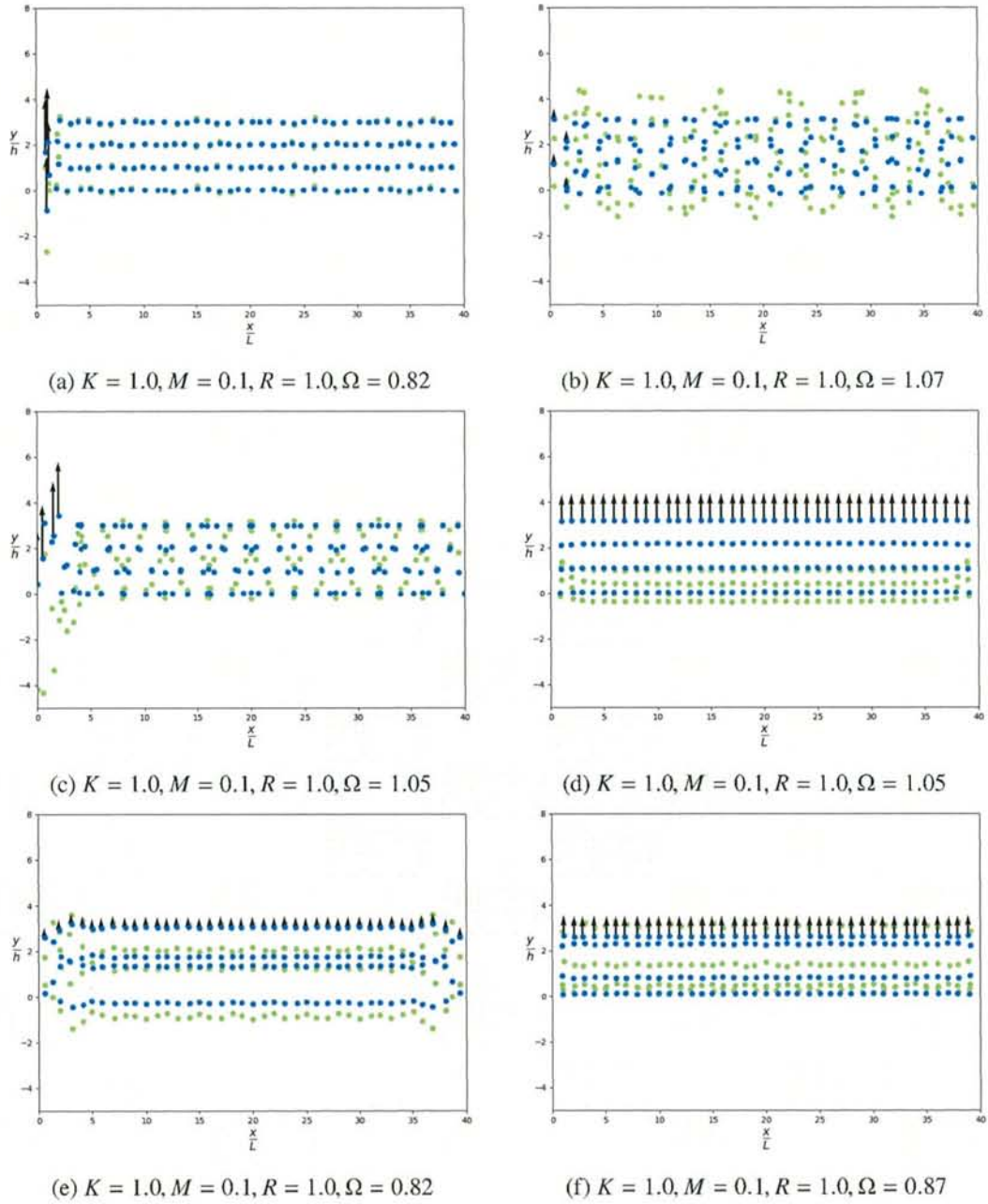


図 3.13: バネマス厚板構造の応答

4 構造設計法

音響メタマテリアルの実用化に向けて、実際に製造可能な音響メタマテリアルの構造設計を行う。第1章でも述べたとおり、複雑なユニットセル形状を持つ音響メタマテリアルの製造は容易ではない。そのような構造の製造を可能にする方法として、本研究では形状の自由度が高い3Dプリンタで出力可能なモデルを考える。本研究では優れた振動減衰構造を設

計するために、大きなバンドギャップを持つユニットセル形状を遺伝的アルゴリズムを用いることで探索する。

4.1 設計対象

本研究で対象とするユニットセル形状の概形を図4.1に示す。図4.1は $10\text{mm} \times 10\text{mm} \times 1\text{mm}$ の板4枚を口の字型に組み合分けた構造に、図4.2に示すようなバネマス系を取り付けた構造である。図4.2のバネマス系は、 $dv1 \times dv3 \times 1\text{mm}$ のバネ部と $dv2 \times dv3 \times h$ のマス部を組み合わせた構造である。 $dv1 \sim dv3$ は設計変数と呼び、これらの変数の値を最適化することで形状の探索を行う。ここで h はバネマス系の体積が 100mm^3 となるように制約する。これは、質量増減による振動特性の変化を起こさないための制約である。

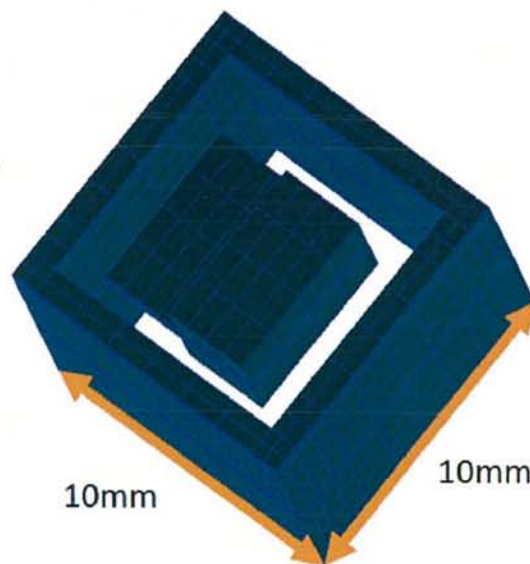


図 4.1: ユニットセルの概形

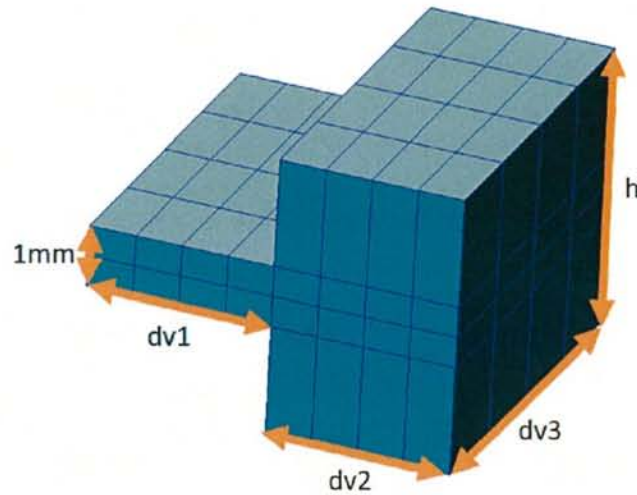


図 4.2: バネマス系の概形と設計変数の定義

4.2 設計手法

4.2.1 分散曲線

図 4.1 のユニットセルのバンドギャップを求めるため、式 (4.1) に示されるような固有値問題を解くことで分散曲線を求める。このとき、 P は μ_x, μ_y, μ_z を変数に持つ。 μ_x, μ_y, μ_z の値は $0 \sim \pi$ まで連続的に変化させる必要があるが、 (μ_x, μ_y, μ_z) の組み合わせごとに固有値計算が必要であり、計算に時間がかかる。そこで、最適化では 3 パターン $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (0, 0, 0) = (\pi/2, \pi/2, \pi/2) = (\pi, \pi, \pi)$ のみの固有値計算から分散曲線を求める。これはバネマス厚板構造に対する数値計算で、バンドギャップの上限は $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (0, 0, 0)$ に存在し、バンドギャップの下限は $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (\pi, \pi, \pi)$ の近傍に存在するという結果になったことを参考に行っている。特に、バンドギャップの下限にずれが発生することが予測されるが、結果への影響は小さいと仮定し最適化を行う。

$$P^* (K - \Omega^2 M) P U = 0 \quad (4.1)$$

分散曲線の計算に必要な構造の剛性行列と質量行列は、有限要素解析ソルバである Nastran2014® を用いて出力する。

4.2.2 遺伝的アルゴリズム

遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm : GA) とは生物の進化を模擬した最適化手法であり、Holland [10] により提案された。GA の最適化手順を図 4.3 に示す。まず、初期個体と呼

ばれる個体群を用意する。それらの個体を評価することで、優れた個体を選択し、劣った個体を淘汰する。その後、生き残った個体群から交叉や突然変異などを用い新しい個体群を生成する。そして新しい個体群を評価する。これらの作業の繰り返しを行い、より優れた個体の探索を行っていく。

本研究では、設計変数として図 4.2 に示す設計変数を用いる。設計変数の最大値と最小値を表 4.1 に示す。個体の評価に用いる目的関数は、バンドギャップの上限値の最大化と、下限値の最小化とする。最適化のループを回す回数である世代数は 100 世代として、一世代あたりの個体数を 10 個体とする。

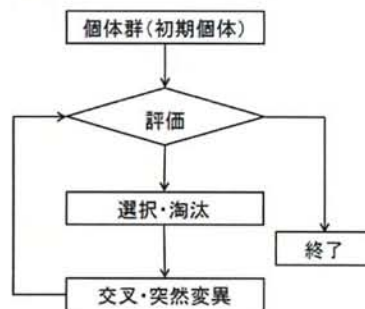


図 4.3: GA のフローチャート

表 4.1: 設計変数

	設計変数	最小値	最大値
dv1	パネの長さ	2.5mm	4.5mm
dv2	マスの長さ	2.5mm	4.5mm
dv3	パネマス系の幅	4.0mm	8.0mm

4.3 結果

図 4.4 に、最適化計算で得られた全世代の個体解の目的関数の値を示す。コンターの色は世代数を示している。図 4.4 において、左上にある個体ほど優れた個体と言える。図 4.4 の結果から、今回の最適化計算におけるバンドギャップの上限値と下限値は、比例関係に近い関係を持つことが分かる。これは、バンドギャップの上限値と下限値がパネマス系の固有周波数に依存するためだと予想できる。図 4.5 にバンドギャップの幅と上限値の関係を、図 4.6 にバンドギャップの幅と下限値の関係を示す。図 4.4 と同様にコンターの色は世代数を示しているが、図 4.5, 4.6 からは世代数の増加に伴いバンドギャップが大きくなっていることが確認できる。また、バンドギャップの上下限値が高くなるほどバンドギャップの幅が大きくなることが分かる。前章では、パネマス系の固有周波数で無次元化した角周波数を用いて分散曲線を示

した。このように無次元化された分散曲線を、バネマス系の固有周波数をかけることで有次元に戻すと、バネマス系の固有周波数が高いほどバンドギャップが大きくなる。このことから、今回の最適化計算に用いたユニットセルの分散曲線は、バネマス系の固有周波数を用いて無次元化すると似たような曲線になると予想できる。これらの結果から、今回設定した設計変数ではユニットセルの分散曲線に大きな違いが生まれなかったと言え、バンドギャップの広いユニットセル形状の更なる探索には、より様々な形状について検討する必要があると言える。

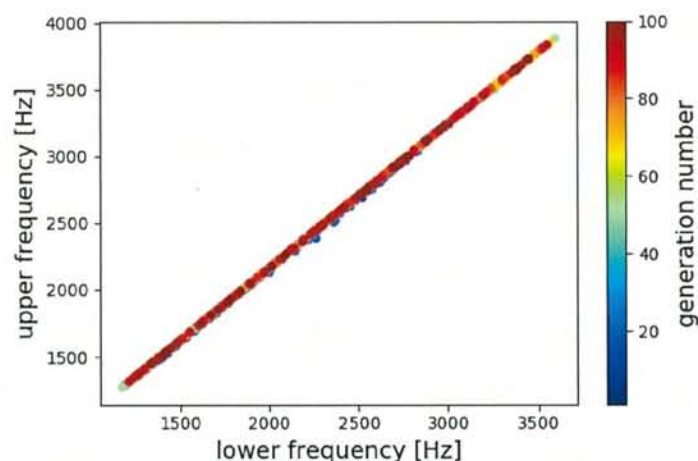


図 4.4: バンドギャップの上限値と下限値の関係

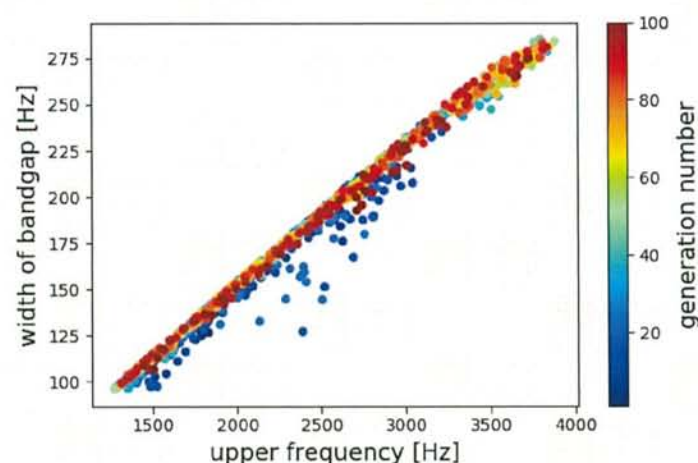


図 4.5: バンドギャップの幅と上限値の関係

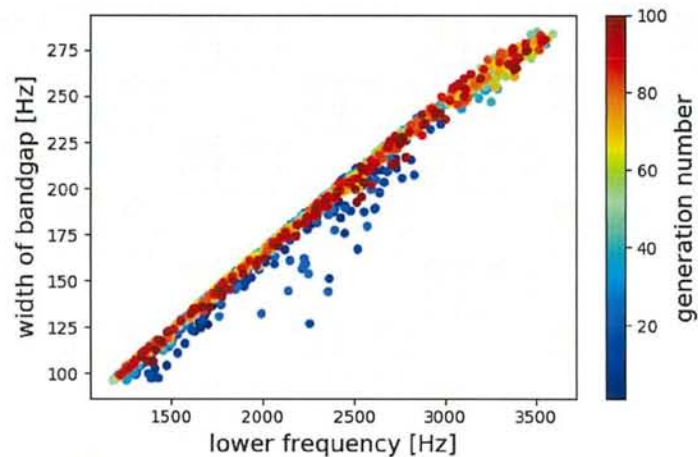


図 4.6: バンドギャップの幅と下限値の関係

5 結論

バネで繋がれた質点を用いた音響メタマテリアルの運動方程式に対する考察から、バンドギャップ内の周波数を持つ振動の伝播には、カットオフモードと準剛体モードの二種類あることが分かった。どちらの伝播もユニットセル間を伝わる過程で、振幅が指数関数的に減少することが分かった。また、ユニットセル間の位相が準剛体モードでは同じ位相になり、カットオフモードでは半周期ずれることが分かった。

バネマス系が周期的に配置された連続体の板に対する数値計算から、分散曲線におけるバンドギャップの周波数域と、全体構造に対する応答解析における振幅が指数関数的に減衰する周波数域が一致することを確認できた。

遺伝的アルゴリズムを用いてユニットセル形状の最適化計算を行い、バンドギャップの最大化を行った。しかし、バンドギャップの上限値と下限値がバネマス系の固有周波数に大きく依存するような結果となり、意図した最適化が行われなかった。そのため、今後の最適化ではより多様な形状に対する検討が必要だと分かった。

6 謝辞

本研究を進めるにあたり、研究・論文の執筆にご助言いただいた、首都大学東京 金崎 雅博 准教授に、深い感謝の意を表します。

また、音響メタマテリアルについて無知だった私に、丁寧な説明・研究のご指導いただいた、国立研究開発法人 宇宙航空研究開発機構 JAXA 航空技術部門 数値解析技術研究ユニッ

ト 応用解析セクション 高橋 孝様に, 深い感謝の意を表します.

最後に, 論文の執筆などにご協力して頂いた研究室の皆様に, 感謝の意を表します.

参考文献

- [1] 真田 篤志, メタマテリアルとは? これで世の中はどう変わるのか?, 通信ソサイエティマガジン No.15 [冬号] 2010
- [2] 道下 尚文, 電波を遮断する EBG 構造, 通信ソサイエティマガジン No.15 [冬号] 2010
- [3] A.R. Diaz, A.G. Haddow, L. Ma, Design of band-gap grid structure, Struct Multidisc Optim 29 (2005)
- [4] Claus C.Claeys, Karel Vergote, Paul Sas, Wim Desmet, On the potential of tuned resonators to obtain low-frequency vibrational stop bands in periodic panels, Journal of Sound and Vibration 332 (2013)
- [5] H.H. Huang, C.T. Sun, G.L. Huang, On the negative effective mass density in acoustic metamaterials, International Journal of Engineering Science 47 (2009)
- [6] R.S. Langley, A Note on the Force Boundary Conditions for Two-dimensional Periodic Structures with Corner Freedoms, Journal of Sound and Vibration (1993)
- [7] 末岡 淳男, 金光 陽一, 近藤 孝広, 機械振動学, 朝倉書店
- [8] 大熊 政明, 構造動力学, 朝倉書店
- [9] A.P. フレンチ, MIT 物理 振動・波動, 培風館
- [10] Holland, H.J., Adaption in Natural and Artificial Systems, University of Michigan Press Ann Arbor 1975